COURS
D'ASTRONOMIE
ET DE GÉODÉSIE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
79210 Quai des Grands-Augustins, 55.

Astron.
I.

TORONTO LIBRARY

COURS D'ASTRONOMIE ET DE GEODÉSIE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Par H. FAYE,
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

REVU ET MIS A JOUR

Par le Général R. BOURGEOIS,
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes,
Professeur à l'École Polytechnique.

281 B
Coronado
80

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE — APPLICATION A LA NAVIGATION
THÉORIE DES ERREURS
GÉODÉSIE — GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE

Deuxième fascicule

GÉODÉSIE — GÉOGRAPHIE

223745
4.7.28

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

ERRATA DU PREMIER VOLUME,

PREMIER FASCICULE.

Pages.	Lignes.	
85	11	*au lieu de* $\frac{F}{f}$, *lire* $\frac{f}{F}$.
86	17	*au lieu de* $\frac{F\lambda}{2R}$, *lire* $\frac{F\lambda}{R}$.
86	25	*au lieu de* $\frac{F\lambda}{2R}$, *lire* $\frac{2F\lambda}{R}$.
86	26 et 27	*au lieu de* et le pouvoir optique de la lunette sera $\varepsilon = \frac{\lambda}{2R}$, *lire* et le pouvoir optique de la lunette sera dans ce cas $\varepsilon = \frac{2\lambda}{R}$; on prend souvent aussi comme valeur du pouvoir optique $\varepsilon = \frac{\lambda}{R}$ qui correspond au cas où la circonférence de chaque tache centrale passe par le centre de l'autre tache.
132	3	*au lieu de* M_1, *lire* M.
	10 et 11	*au lieu de* $\frac{p_0}{g_0\delta}$, *lire* $\frac{p_0}{g_1\delta}$.
183	11	*au lieu de* Nous avons traité, *lire* Nous traiterons encore.
204	11	*au lieu de* $\frac{u+u}{2}$, *lire* $\frac{u+u'}{2}$.
207	12	*au lieu de* du deuxième ou du quatrième vertical, *lire* du premier ou du troisième vertical.
207	7 et 8	en remontant, même correction.
210	2	en remontant, *au lieu de* $\mathcal{R} - (H' - H)$, *lire* $\mathcal{R} + (H' - H)$.
210	1	en remontant, *au lieu de* $EPE' = \mathcal{R}' - \mathcal{R} + (H' - H)$, *lire* $EH' = \mathcal{R}' - \mathcal{R} - (H' - H)$.
254	20	*au lieu de* $l = 991^{mm} + x$, *lire* $l' = 991^{mm} + x$.

LIVRE CINQUIÈME.

GÉODÉSIE.

Nous savons maintenant déterminer les coordonnées géographiques d'un point quelconque du globe avec une très grande exactitude. En reportant ces coordonnées sur une sphère, ou sur une carte par des procédés géométriques, on obtiendra ainsi la représentation de la Terre entière ou d'une de ses parties, au moyen d'un certain nombre de points bien déterminés, et l'on comblera les intervalles à l'aide d'opérations purement topographiques. Il ne resterait plus ensuite qu'à déterminer l'échelle, c'est-à-dire les dimensions de la Terre, pour avoir les distances réelles réciproques des points ainsi placés et à déterminer leurs altitudes au-dessus d'une surface de comparaison.

Pour avoir l'échelle, il faut mesurer le rayon de la Terre. Le procédé le plus simple consisterait à observer, comme on le fait pour les astres à dimensions sensibles, le diamètre angulaire de la Terre vue d'une station de hauteur connue. Soient h l'altitude de la station au-dessus de la mer, Δ le diamètre angulaire du globe, r son rayon; on a

$$\frac{r}{r+h} = \sin\frac{1}{2}\Delta.$$

Cet angle $\frac{1}{2}\Delta$ n'est autre chose que le complément de la dépression d de l'horizon du spectateur placé à l'altitude h. Il s'obtient, sur mer avec une certaine précision, parce qu'alors les contours du globe terrestre apparaissent avec netteté, sans être altérés par les inégalités du sol. On déduit de cette relation

$$\frac{r}{r+h} = \cos d, \qquad \text{d'où} \qquad 2\sin^2\frac{1}{2}d = \frac{h}{r+h}.$$

En tenant compte de la réfraction géodésique, dont la constante est m, et en négligeant h au dénominateur vis-à-vis de r, cette formule devient, comme on le verra plus loin :

$$2\sin^2\frac{1}{2}d = \frac{m-1}{m}\frac{h}{r}.$$

Les élèves de l'École navale de Brest se sont exercés à mesurer ainsi la dépression de l'horizon de la mer d'une hauteur de 75^m ; ils ont trouvé $d = 15'30''$. Voici le calcul de r en donnant à m la valeur 8, trouvée page 134 du premier fascicule :

$\log h$	1,87506
$\log\frac{7}{8}$	9,94201—10
$\mathrm{C}^t\log 2$	9,69897—10
$\mathrm{C}^t\log\sin^2\frac{1}{2}d$	5,29394
$\log r$	6,80998

$$r = 6456000^m.$$

Ce nombre est un peu trop fort. On obtiendrait plus d'exactitude en opérant sur le sommet d'une haute montagne au milieu de l'Océan, telle que le pic de Ténériffe (3710^m), et non seulement on mesurerait ainsi le rayon de la Terre, mais on en déterminerait très passablement l'aplatissement, car, dans le sens du méridien, on aurait $d = 1°50'11''$, tandis que, dans le sens transversal, on trouverait $1°49'43''$. La Terre n'étant pas une sphère parfaite, mais un ellipsoïde de révolution légèrement aplati aux pôles, le cône formé par les rayons visuels tangents à son contour ne serait pas un cône droit à base circulaire, mais un cône à base légèrement elliptique.

Ce procédé n'a jamais été sérieusement appliqué à cause des petites anomalies que présente parfois la réfraction géodésique. Un moyen beaucoup plus exact consiste à mesurer la longueur s d'un arc de méridien quelconque ; on en détermine ensuite l'amplitude angulaire vue du centre de la Terre. Celle-ci sera la différence des colatitudes λ et λ' des extrémités de l'arc s. On aura enfin, r désignant le rayon de la Terre, $r(\lambda - \lambda') = s$, relation où l'angle $\lambda - \lambda'$ devra être exprimé en parties du rayon, c'est-à-dire converti en secondes et divisé par $206265''$ ou multiplié par $\sin 1''$.

Quant aux petites irrégularités du sol solide et au relief des

continents, on les déterminerait par une opération spéciale, à savoir un nivellement rapporté au niveau de la mer. C'est en effet la surface des mers, prolongée idéalement par-dessous les continents, qu'on doit considérer comme la surface mathématique du globe terrestre, car elle est en chaque point perpendiculaire à la direction de la verticale, du moins si l'on néglige les petites dénivellations accidentelles ou périodiques de l'Océan dues aux vents et aux marées.

Il est aisé d'ailleurs de se faire une idée du peu d'importance de ces irrégularités quand on les rapproche des dimensions du globe lui-même. Représentez-le par la circonférence qui figure, sur la figure 4 du premier fascicule de cet Ouvrage, l'orbite d'Uranus. Elle a $0^m,73$ de rayon. Eh bien, si vous donniez au trait une largeur un peu plus forte, de $\frac{1}{4}$ de millimètre environ, non seulement les plus hautes montagnes et les profondeurs des mers seraient comprises, à cette échelle-là, dans l'épaisseur de ce trait, mais encore la petite déformation due à l'aplatissement. Nous sommes donc en droit de les négliger provisoirement, et de considérer tout d'abord la Terre comme une sphère dont la surface mathématique se manifeste le mieux sur les mers.

L'ensemble des études et des observations que nous venons d'esquisser forme l'objet de la Géodésie. Le but de cette science est double et consiste d'une part dans la détermination de la figure et des dimensions du globe terrestre et d'autre part dans l'établissement à la surface de la Terre de réseaux de points de longitude, de latitude et d'azimuts réciproques précis sur lesquels s'appuieront les cartes des différents pays.

Figure de la Terre.

On peut, par des considérations purement mathématiques, déterminer théoriquement la figure de la Terre.

Les données fondamentales sont la rotation uniforme de la Terre autour de son axe, la loi d'attraction newtonienne et la fluidité de la Terre au début des âges géologiques. Dans ces conditions, elle a dû, à l'origine, prendre la forme d'équilibre stable d'un corps fluide tournant uniformément autour d'un axe, sous l'action

de la résultante des deux forces agissant sur lui, l'attraction mutuelle de ses éléments et la force centrifuge.

On démontre que, dans le cas d'une masse fluide homogène, et pour des vitesses de rotation de l'ordre de celle de la Terre, la forme d'équilibre est un ellipsoïde de révolution aplati dans le sens de l'axe de rotation ; c'est l'équilibre dit de Maclaurin.

Le problème devient beaucoup plus compliqué dans le cas d'une masse fluide hétérogène. Il a cependant été résolu par Clairaut dans le cas où la vitesse de rotation est suffisamment petite pour que l'on puisse négliger son carré et où la densité des couches concentriques va en croissant à mesure que l'on se rapproche du centre. Dans ces conditions, la figure est encore celle d'un ellipsoïde de révolution aplati dans le sens de l'axe de rotation et l'aplatissement est compris entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{2}$ du rapport de la force centrifuge à l'équateur à la pesanteur équatoriale.

La figure d'équilibre de la Terre, quand elle était entièrement fluide, a donc dû être celle d'un ellipsoïde de révolution aplati dans le sens de son axe de rotation. Mais, à la suite de la solidification des couches superficielles et des actions géologiques qui se sont exercées dans la suite des âges, cette figure théorique ne s'est pas conservée et la figure réelle actuelle de la Terre est une surface compliquée qui n'est pas susceptible d'une définition mathématique. Mais, comme nous l'avons dit déjà, la surface des mers est forcément une surface d'équilibre, partout normale à la direction de la pesanteur. Cette surface, supposée prolongée sous les continents, en restant constamment normale à la direction de la pesanteur en chacun de ses points, est ce que l'on considère comme la surface mathématique de la Terre, et on lui a donné le nom de *géoïde*. Le géoïde n'est plus un ellipsoïde de révolution, il s'écarte cependant fort peu d'un tel ellipsoïde et, en un point quelconque de sa surface, la direction de la verticale, c'est-à-dire celle de la pesanteur, à laquelle la surface est normale, est donnée par les coordonnées astronomiques du lieu.

Les géodésiens admettent donc comme première approximation que le géoïde est un ellipsoïde de révolution et leurs opérations ont pour premier objet de déterminer les dimensions d'un ellipsoïde moyen, qui s'écartera peu du géoïde.

Pour déterminer les dimensions de cet ellipsoïde, son grand axe a et son petit axe b, ou encore a et le carré de l'excentricité rapportée au grand axe $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, on pourrait mesurer en différentes régions la longueur MN de la ligne la plus courte tracée sur la surface, qui joint deux points M et N dont on a déterminé les coordonnées astronomiques. Toute mesure de cette sorte fournirait une équation entre la longueur de la ligne MN, les coordonnées des extrémités et les éléments de l'ellipsoïde; deux mesures suffiraient donc. Mais on simplifie beaucoup le problème, en mesurant des arcs de méridien, au lieu de lignes quelconques.

Sur un ellipsoïde de révolution, deux mesures d'arcs de méridien exécutées l'une au pôle et l'autre à l'équateur donneraient immédiatement a et b. Si, en effet, ds est la longueur d'un arc de méridien, et $d\lambda$ l'angle que font entre elles les deux normales aux extrémités de l'arc, le rayon de courbure sera $\frac{ds}{d\lambda}$. Or, ce rayon de courbure est $\frac{b^2}{a}$ à l'équateur et $\frac{a^2}{b}$ au pôle.

Si les deux mesures sont faites sous des latitudes différentes de 0° et de 90°, l'expression du développement d'un arc d'ellipse ds d'amplitude $d\lambda$ donnera une relation entre les différences de latitude des extrémités de l'arc, sa longueur et les dimensions de l'ellipsoïde et l'on en conclura encore a et e^2, donc les dimensions a et b et l'aplatissement $\frac{a - b}{a}$.

La recherche des dimensions de la Terre remonte à une haute antiquité. Nous allons en parcourir rapidement l'histoire depuis les premières déterminations jusqu'à l'époque actuelle.

CHAPITRE XVI.

LES MESURES DE LA TERRE.

Lorsque l'expédition d'Alexandre dans les Indes eut ouvert l'Orient et élargi les notions géographiques jusque-là fort étroites des Grecs, la question des dimensions de la Terre prit naissanee. Il fallait s'en faire une idée pour agencer les nouveaux documents qu'on avait recueillis en parcourant l'Asie presque jusqu'à la Chine. Mais, en l'absence de déterminations astronomiques, on n'avait guère que des évaluations grossières des distances en journées de marche, d'après les armées ou les dires des voyageurs. Aristote portait à 40 000 stades le tour entier de la Terre, on ne sait sur quels fondements. En admettant 180^m pour le stade olympique, cette évaluation donne 72 millions de mètres au lieu de 40 millions.

Mesure d'Ératosthènes.

La première mesure réelle, scientifiquement exécutée, est celle d'Ératosthènes, astronome qui vivait 250 ans av. J.-C. Il avait été appelé à Alexandrie par Ptolémée Philadelphe. Il opéra, comme nous venons de le voir, en mesurant un arc s d'un méridien et en le comparant avec son amplitude céleste $\lambda' - \lambda$. L'arc choisi était énorme; il s'étendait entre les parallèles extrêmes de l'Égypte, ceux d'Alexandrie et de Syène. Ce pays avait été obligé de tout temps, par la constitution de la propriété et le grand phénomène périodique de l'inondation du Nil, d'établir un cadastre régulier sur tout son territoire. Du temps même d'Ératosthènes, le gouvernement avait organisé une corporation d'arpenteurs qui mesuraient au pas toutes les distances dans la partie habitée et cultivée de la vallée du Nil, c'est-à-dire depuis la Méditerranée jusqu'à la première cataracte, près de Syène. Ce géographe était donc en posses-

sion de documents précis pour déterminer, en tenant compte de l'orientation (1), c'est-à-dire dans le sens du méridien, la distance de ces parallèles extrêmes. Il trouva, en nombres ronds, 5000 stades. Avec les éléments de l'ellipsoïde terrestre que nous obtiendrons plus loin, cette même distance est de 797760^{m}. Ainsi ce stade-là serait de $159^{m},6$. Le stade valait toujours 600 pieds; mais, comme le pied variait d'un pays à l'autre, cause de confusion qui n'a pris fin qu'à l'établissement du système métrique, on est souvent incertain sur la valeur des stades. Ici le pied employé devait être celui du cadastre égyptien, d'environ $0^{m},27$: et, en effet, $159^{m},6$ divisé par 600 donne $0^{m},266$. Nous avons donc une idée nette de la partie géodésique de l'opération d'Ératosthènes.

Quant à la partie astronomique, elle consistait à déterminer les colatitudes λ et λ' d'Alexandrie et de Syène. Ératosthènes mesura à Syène et à Alexandrie, à l'aide du gnomon, la distance zénithale du Soleil à l'époque d'un solstice d'été; il trouva ainsi $z = 7^{\circ}12'$ et $z' = 0$ pour les deux villes. De là $\lambda' - \lambda = 7^{\circ}12'$; par suite, en supposant la Terre sphérique, l'arc de $1^{\circ} = \frac{5000 \text{ st.}}{7,2} = 694,4$ stades. Il a donné 700 stades en nombres ronds. Le tour de la Terre serait donc de 250 000 stades ou de $250\,000 \times 600 \times 0^{m},27 = 40\,500\,000^{m}$, au lieu de 40 millions de mètres d'après les évaluations modernes. Nous ne saurions aujourd'hui apprécier exactement l'erreur commise, faute de connaître, avec une précision suffisante, la valeur du pied égyptien il y a deux mille ans; mais, au point de vue astronomique, nous possédons des moyens de contrôle sérieux. La *Connaissance des Temps* donne pour Alexandrie et Syène :

λ	$58^{\circ}.48'$
λ'	65.55
Différence	$7^{\circ}.7'$

L'erreur de l'amplitude déterminée par Ératosthènes n'est donc que de 5′.

Voici une autre vérification plus délicate. Nous verrons, dans la partie de cet Ouvrage qui traite de l'Astronomie, que le gnomon donnait la distance zénithale du bord supérieur du Soleil et non

(1) La différence de longitude des deux villes est de $2^{\circ}59'$.

celle du centre. L'erreur, d'environ 16′, disparaît ici dans la différence des distances zénithales, mais il en faut tenir compte si l'on veut déterminer la colatitude. Les z observés à Alexandrie et à Syène sont donc 7°28′ et 0°16′. Pour obtenir les δ correspondants du Soleil à l'instant du solstice d'été, il faut connaître l'obliquité de l'écliptique. Elle était de 23°28′18″ en 1750 et diminue de 48″ par siècle. Deux mille ans auparavant elle était donc de 23°44′. Ainsi, au solstice d'été, le δ du Soleil était de 66°16′. Par la formule $\lambda = \delta - z$ on trouve :

λ d'Alexandrie....	66°16′ — 7°28′ = 58°48′	au lieu de	58°48′
λ' de Syène.....	66°16′ — 0°16′ = 66° 0′	»	65°55′

Ne connaissant pas le point précis des deux villes où l'observation a été faite, il peut rester une incertitude de 1′ à 2′ sur ces colatitudes; mais cette comparaison suffit à prouver que toute l'opération d'Ératosthènes a été faite avec soin et même avec plus d'exactitude qu'on n'en trouve dans les meilleures observations de cette époque reculée. Il est bon de rappeler à cette occasion qu'Ératosthènes a été le véritable créateur de la Géographie générale; le premier il a su apprécier l'extension du vaste continent européo-asiatique depuis les îles Canaries à l'Ouest, jusqu'aux côtes de la Chine, à l'Est; il estimait que cette vaste terre, centralement traversée dans le sens d'un parallèle par une chaîne de hautes montagnes, ne dépassait pas 180° de longitude, ce qui laissait entièrement inconnue et inexplorée l'autre face du globe terrestre occupée par le Pacifique, l'Amérique et l'Atlantique.

Prétendue mesure de Posidonius.

Ératosthènes avait assigné, pour la distance de Rhodes à Alexandrie, 3750 stades. Voici les coordonnées de ces deux villes :

	λ.	L.
Rhodes.....	53°33′,1	25°53′,8
Alexandrie.....	58°48′,2	27°31′,2

Par la formule

$$\cos a = \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \cos(L' - L),$$

on trouve pour la distance a, en arc de grand cercle, $5°25',2$. Avec 6,80320 pour le logarithme du rayon de courbure du méridien à la colatitude moyenne de 55°, nous aurons 601270^m pour cette distance. Par conséquent le stade valait 160^m et le pied $0^m,267$. Nous avions trouvé tout à l'heure $0^m,266$. C'était donc le même pied égyptien et le même stade de 160^m que nous avons déjà rencontrés. La précision de cette nouvelle mesure montre que ce géographe s'était servi, pour l'établir, des traversées les plus directes de Rhodes à Alexandrie et que, suivant toute probabilité, les marins de cette époque se servaient déjà fort habilement du loch et de l'ampoulette pour mesurer le chemin parcouru en mer. Mais c'est là la seule donnée valable de la prétendue mesure de la Terre qu'on attribue à Posidonius.

Ce dernier part de la remarque fausse que l'étoile Canopus (1re grandeur) ne fait que raser l'horizon de la mer à Rhodes; δ étant la distance polaire de l'étoile, on aurait donc, en négligeant la réfraction, inconnue à cette époque,

$$\lambda = \delta - 90°.$$

D'autre part, Posidonius affirme que cette étoile avait $7°30'$ de hauteur, à Alexandrie, au moment de son passage au méridien; par conséquent,

$$\lambda' = \delta - 82°30',$$

toujours en négligeant la réfraction. Il en a donc conclu

$$\lambda' - \lambda = 7°30',$$

ce qui donne

$$\frac{3750}{7,5} = 500 \text{ stades au degré},$$

au lieu des 700 stades d'Ératosthènes. L'erreur est des $\frac{4}{10}$, près de moitié du résultat trouvé.

Il est aisé aujourd'hui d'obtenir, par un calcul de précession qu'on trouvera dans la partie astronomique, la coordonnée δ de Canopus à l'époque de Posidonius. Elle était de $142°30'$. Par conséquent, au lieu de raser l'horizon à Rhodes, elle s'y élevait, au méridien, à une hauteur de $1°24',5$. Au lieu d'avoir à Alexandrie, à sa culmination, une hauteur de $7°30'$, elle ne s'élevait qu'à $6°26'$. Évidemment la première observation repose sur de vagues

ouï-dire, et la seconde n'a pas été faite, car on ne se trompait pas, à cette époque, d'un degré entier. Il est possible que Posidonius ait calculé cette hauteur à l'aide des coordonnées écliptiques observées à Rhodes par Hipparque un siècle auparavant, car Hipparque, ne connaissant pas la réfraction, a donné pour cette étoile, mal placée, une distance au pôle de l'écliptique assez erronée. Quoi qu'il en soit, l'erreur de l'amplitude astronomique de l'arc Rhodes-Alexandrie résulte de ce fait :

$$\begin{aligned} &\text{Rhodes} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda = 53^{\circ}.33',1 \\ &\text{Alexandrie} \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda' = 58.48,2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda' - \lambda = \ 5.15,1 \end{aligned}$$

$\lambda' - \lambda = 5^{\circ}\,15'$ et non $7^{\circ}\,30'$. L'erreur est ainsi de $2^{\circ}\,\frac{1}{4}$, c'est-à-dire des $\frac{4}{10}$.

Évaluation de Ptolémée.

Nous arrivons à l'évaluation de Ptolémée vers l'an 150. Ce grand astronome se borne à dire qu'il a repris la mesure d'Ératosthènes et qu'il a obtenu le même résultat. Seulement il adopte aussi 500 stades en nombres ronds pour le degré. Le stade de l'auteur de l'*Almageste* était de 600 pieds philétériens. Or ce pied est de $0^{m},36$ au lieu de $0^{m},267$. Pour faire la conversion il a dû multiplier 700 par $\frac{0,267}{0,36}$, ce qui donne 515 stades, ou 500 en nombres ronds.

Vérification de l'évaluation de Ptolémée par les Arabes.

Cette évaluation a été confirmée par les astronomes arabes qui mesurèrent, en 827, un arc de 1° dans les plaines de la Mésopotamie. Ils trouvèrent 56 milles et conclurent qu'ils avaient vérifié ainsi le nombre de Ptolémée. Le mille arabe étant d'environ 2100^{m}, leur arc avait donc 117600^{m}, ce qui, à raison de 500 stades au degré, donne 235^{m} au stade. C'est grossièrement le stade philétérien de Ptolémée (216^{m}), et la différence doit tenir à notre évaluation actuelle du mille arabe du temps du calife Almamoun.

Mesures modernes.

En résumé, l'antiquité ne nous a légué qu'une seule mesure sérieuse, celle d'Ératosthènes. Elle a suffi pour donner aux géographes grecs une idée assez juste des proportions de l'Europe et de l'Asie vis-à-vis des parties inconnues du globe. Le moyen âge n'a rien tenté dans cette voie; les notions géographiques s'y sont même oblitérées au point de faire croire à Christophe Colomb qu'il atteindrait l'Asie en franchissant au plus une centaine de degrés vers l'Ouest à travers l'Atlantique. La découverte de l'Amérique (1492), due à ce grand homme, donna un nouvel essor à la navigation et rendit de plus en plus nécessaire aux marins la connaissance des dimensions de notre globe. Il est probable que les premiers navigateurs au long cours se servaient de l'évaluation de Ptolémée pour obtenir la valeur de 1° ou de 1′ terrestre en unités de mesures modernes.

Fernel, Snellius, Norwood.

Ce n'est, en effet, qu'au courant du siècle suivant, cinquante-huit ans après la découverte de l'Amérique, qu'on voit un premier essai de mesure directe. Le médecin Fernel détermina fort exactement en 1550, par ses propres observations astronomiques, l'amplitude de l'arc méridien de 1° compris entre Paris et Amiens. Il en mesura la longueur par un procédé fort ingénieux. Ce procédé consistait à adapter aux roues de sa voiture un compteur et à enregistrer ainsi le nombre de tours de roue dans un voyage de Paris à Amiens, sur une route à très peu près droite et dirigée du Nord au Sud. Il mesura ensuite avec soin la circonférence de ses roues, et, après avoir tenu compte des petites inflexions de la route, il trouva 57070^{T} pour la longueur de ce degré. Le succès était complet, mais il ne paraît pas qu'on ait fait grande attention à ce beau résultat.

Snellius, géomètre hollandais, mesura, soixante-cinq ans plus tard, en 1615, la distance d'Alkmaar à Berg-op-Zoom et trouva 55021^{T} au degré. L'erreur était de 2000^{T}, mais l'opération avait

été conduite d'après des principes nouveaux qui furent adoptés plus tard par tous les géodésiens. La marche suivie consistait à rattacher les deux extrémités de l'arc à mesurer par une série de triangles juxtaposés, de manière à réunir deux triangles contigus par un côté commun. Snellius observait tous les angles de ces triangles et mesurait l'un des côtés. Le calcul trigonométrique devait lui faire connaître la distance des points extrêmes.

En 1635, Norwood eut la patience de chaîner les $2^{\circ},5$ qui séparent Londres de York, en relevant à la boussole les sinuosités du chemin. Il trouva 57424^{t}. L'erreur est de 350^{t}. Mais en Angleterre même cette mesure semble être restée ignorée. Les géographes et les marins anglais se servaient du *statut mile* de 1760 *yards* comme d'un mille de 60 au degré, tandis que le degré vaut réellement $69\frac{1}{2}$ de ces *miles*. Cette erreur, d'un sixième environ, que les mesures de Fernel, de Snellius, de Norwood auraient dû faire éviter, a joué un grand rôle dans l'histoire de la Science; nous verrons qu'elle a failli étouffer dans son germe la découverte de l'attraction universelle.

Picard et les Cassini.

Toutes ces tentatives restèrent inaperçues ou ignorées jusqu'au jour où Picard se mit à l'œuvre avec des procédés nouveaux, d'une précision que l'on n'a guère surpassée depuis. Pour la première fois on vit des lunettes figurer dans les instruments de mesure, ce qui permit de décupler la grandeur des côtés des triangles et de centupler l'exactitude des mesures angulaires. A l'exemple de Snellius, Picard couvrit la méridienne de Paris à Amiens d'une chaîne de triangles. Il y rattacha une base mesurée à Juvisy avec un soin extrême, et calcula trigonométriquement la méridienne qui traversait sa triangulation. Telle est la méthode qu'on suit encore aujourd'hui et que nous exposerons plus loin en détail. La mesure de Picard, exécutée en 1665, porta le degré à 57060^{t}. Elle fut publiée quelques années plus tard; quand elle parvint en Angleterre, Newton, armé de ce nombre, découvrait l'attraction universelle.

L'opération que nous venons de rappeler est la véritable origine

de la Géodésie. Picard comprit que ces méthodes nouvelles s'appliqueraient parfaitement à la description géométrique d'un grand pays comme la France. Dans un Mémoire célèbre qu'il présenta à l'Académie, il proposait de conduire à travers la France entière, sur la méridienne de Paris, une chaîne de triangles allant de Dunkerque à Perpignan, et d'y rattacher toutes les triangulations partielles destinées à relier à cette vaste base les autres contrées de la France. Ces triangles, à leur tour, seraient remplis par des opérations de détail purement topographiques, dont les erreurs inévitables ne devaient pas aller en s'accumulant, puisque, de distance en distance, les levers de détail s'appuieraient sur de nouveaux côtés de triangles parfaitement déterminés. Une telle Carte était de nature à fournir aux ingénieurs civils ou militaires toutes les données nécessaires à l'étude de leurs projets pour la construction des routes, des canaux de navigation ou d'irrigation, à l'administration pour l'assiette de l'impôt foncier, à la propriété territoriale pour l'exacte délimitation des terres. Colbert comprit la grandeur et l'utilité pratique des propositions de Picard et lui procura l'approbation du roi. En 1680, après la mort de ce savant académicien, Cassini et Lahire commencèrent ces grandes opérations. La méridienne centrale fut achevée en 1718, et la Carte de l'Observatoire, nommée souvent *Carte de Cassini*, fut terminée à la fin du 18ᵉ siècle.

Expéditions en Laponie et au Pérou.

La Géodésie devait servir la Science pure d'une manière non moins décisive. Les théorèmes d'Huyghens sur la force centrifuge avaient donné à penser que la figure de la Terre, tournant autour d'un certain axe, devait, en vertu de cette rotation même, être aplatie aux pôles et renflée à l'équateur. Jupiter, dont la rotation est plus rapide, présentait en effet, dans les lunettes déjà puissantes de cette époque, un aplatissement très caractérisé. Ainsi qu'on l'a vu plus haut, Newton, abordant cette question dans l'hypothèse d'une sphère liquide homogène, montra que l'aplatissement provenant d'une rotation semblable à la nôtre lui imprimerait un aplatissement de $\frac{1}{230}$. Il fit bien plus encore en rattachant, à l'exis-

tence de cet aplatissement, le phénomène grandiose de la précession des équinoxes (1).

Si la Terre avait ainsi une figure aplatie, la longueur des arcs de 1° d'amplitude devait aller en croissant de l'équateur aux pôles. Cependant les mesures géodésiques alors en cours d'exécution en France ne semblaient pas favoriser cette conclusion. L'Académie des Sciences résolut cette question capitale au moyen de vastes opérations entreprises à la fois vers l'un des pôles, à l'équateur, et dans une région intermédiaire. Les résultats de ces expéditions, qui constituèrent définitivement la Géodésie et auxquelles se rattachent les noms de Maupertuis et de Clairaut (Laponie), de Bouguer et de Lacondamine (Pérou), furent ceux-ci :

	o	T
Au Pérou, par 91°30′ de colatitude.....	1 =	56750
En France, par 45° de colatitude.....	1 =	57069
En Laponie, par 20° de colatitude.....	1 =	57422

Les rayons conclus sont :

	T
Au Pérou.....	3251540
En France.....	3269850
En Laponie.....	3290000

Ces nombres, qui représentent réellement les rayons de courbure de la courbe génératrice du sphéroïde terrestre, mettent en évidence la figure elliptique, ou du moins son aplatissement.

Opérations ultérieures. Méridienne de Delambre.

Les grandes expéditions dont on vient de parler avaient eu un grand retentissement considérable et nombre d'États exécutèrent à leur tour des mesures d'arc.

A ces travaux se rapportent les petits arcs mesurés en Italie; dans les États de l'Église de 1751 à 1753 par les Pères Le Maire et Boscovich et dans la plaine de Turin en 1768 par le Père Beccaria; en Hongrie et en Moravie à la même époque par le Père Liesganing; en Pensylvanie en 1764 par Mason et Dickson.

(1) C'était là une démonstration péremptoire de l'aplatissement. Avec une Terre sphérique il n'y aurait pas eu de précession; avec une Terre allongée, la précession se serait effectuée en sens inverse.

L'Angleterre et la Prusse commençaient à la même époque des triangulation sur leurs territoires.

La comparaison de tous ces arcs faisait douter de la similitude des méridiens et de la régularité de leur courbure, de telle sorte que lorsqu'en 1790 l'Assemblée Nationale, en France, proposa de prendre comme unité fondamentale de mesure la dix-millionième partie du méridien terrestre, la Commission Royale, composée de Laplace, Lagrange, Monge, Condorcet et Borda, conclut à la nécessité d'une mesure nouvelle que l'on espérait devoir être définitive. L'arc mesuré allait de Dunkerque à Barcelone et les opérations commencées en 1791 se terminèrent en 1798. Cette œuvre accomplie au milieu de difficultés de tous genres a été considérée, en raison de la perfection avec laquelle elle fut faite, comme un exemple à donner et un modèle à suivre.

La combinaison du nouvel arc français avec l'arc du Pérou donna pour la longueur du quart du méridien 5 130 740 toises, et pour l'aplatissement $\frac{1}{334}$.

En 1808 l'arc français fut prolongé par Biot et Arago jusqu'à l'île de Formentera, ce qui lui donne une amplitude de 12°30′ environ; l'arc du Pérou n'avait que 3°7′.

Les mesures du XIX^e^ siècle et les travaux actuels.

Le XIX^e^ siècle et l'époque actuelle ont vu se poursuivre les opérations destinées à déterminer avec plus de précision encore les dimensions de l'ellipsoïde terrestre.

En Russie, Struve, directeur de l'Observatoire de Dorpat, et Tenner, colonel à l'État-Major général, entreprirent la mesure d'un arc russo-scandinave le long du 44^e^ degré de longitude, de l'océan Glacial à l'embouchure du Danube. Cet arc a 25° d'amplitude; commencé en 1817, il fut terminé en 1852.

La Grande-Bretagne et la France firent en 1860 la jonction de la méridienne de Delambre et Méchain, avec la triangulation anglaise. C'est à la suite de cette opération que fut décidée en France la mesure d'une nouvelle méridienne, par des procédés et avec des instruments plus précis que ceux du XVIII^e^ siècle. Les opérations commencées en 1870 furent terminées en 1894.

L'Espagne avait, de son côté, exécuté une triangulation générale de son territoire de 1869 à 1878. Cela donnait la possibilité de prolonger l'arc anglo-français jusqu'à la Sierra Nevada et à la Méditerranée.

D'autre part, le Dépôt de la Guerre français avait fait procéder de 1860 à 1870, en Algérie, à la mesure d'une chaîne primordiale, parallèle à la côte, et s'étendant de la frontière de Tunisie à la frontière du Maroc. Au cours de cette triangulation, l'un des géodésiens chargé des travaux, le capitaine Perrier, qui fut plus tard, comme général, directeur du Service géographique de l'Armée, eut un jour la bonne fortune d'apercevoir, des sommets des montagnes algériennes situées aux environs de Tlemcen, les sommets élevés de la Sierra Nevada et de conclure à la possibilité de relier les triangulations d'Algérie et d'Espagne par-dessus la Méditerranée.

L'opération fut exécutée en 1879 et réussit parfaitement, malgré des difficultés inouïes, dues autant à la longueur des côtés (170 à 300^{km}) qu'aux intempéries et à la rigueur du climat sur les sommets élevés des montagnes espagnoles.

L'arc de méridien fut ensuite prolongé jusqu'à Laghouat, de sorte qu'il atteignit en 1885, à la fin des opérations, une amplitude de 17°, des îles Shetland aux confins du Sahara.

Il faut ajouter à ces arcs européens deux arcs de parallèles, l'un, suivant le parallèle de 51°, de Valentia en Irlande à Orsk dans l'Oural, commencé par Struve en 1857 et qui a 69° d'amplitude, et l'autre, encore en cours (1927), le long du parallèle de 47°30′, de Brest à Astrakan.

L'Amérique a, de son côté, entrepris de vastes opérations de mesures d'arcs de méridien et de parallèle, dont les principaux sont : l'arc de parallèle du 39^{e} degré de latitude, de l'Atlantique au Pacifique (1871-1898), amplitude 49°; le grand arc oblique du 30^{e} au 45^{e} degré de latitude, le long des côtes est des États-Unis, amplitude de $23°\frac{1}{2}$ (1902); l'arc de méridien du 98^{e} degré de longitude, de la côte sud du Mexique à la mer Glaciale, actuellement encore en cours d'exécution (1927).

En Afrique, sur l'initiative de sir W. Gill, directeur de l'Observatoire du Cap, on a commencé, en 1883, la mesure d'un arc gigantesque, qui ira du Cap au Caire, et aura au total 65° d'ampli-

tude. La triangulation terminée au Sud jusqu'au lac Tanganika (23° d'amplitude) a été arrêtée par la guerre en 1914; elle est actuellement reprise et sera terminée dans quelques années.

Enfin, à la fin du XIX^e siécle et au commencement du XX^e, une mission russo-suédoise a repris une mesure d'arc polaire au Spitzberg, c'est-à-dire bien plus au nord que celle de Clairaut et Maupertuis et de 4° d'amplitude. Les travaux ont été exécutés de 1898 à 1902. Les calculs arrêtés par les événements de la guerre de 1914 et de la révolution russe ne sont pas encore terminés, sauf pour la partie exécutée par l'expédition suédoise.

Cette nouvelle mesure de l'arc polaire a déterminé la reprise de la mesure d'un arc équatorial, dans la région où avaient opéré, au XVIII^e siècle, Bouguer, Godin et La Condamine. Les opérations ont été exécutées par les officiers du Service géographique de l'Armée française, sous la direction du commandant Bourgeois, depuis général et directeur du Service géographique de l'Armée. Les travaux commencés en 1901 ont été terminés en 1906. L'amplitude de l'arc est de 5°52′, celui de Bouguer n'avait que 3°7′. Les calculs, interrompus par la guerre de 1914 à 1918, sont actuellement en cours et seront incessamment terminés.

On dispose donc à l'époque actuelle d'un véritable arsenal d'arcs de méridien et de parallèles, dont les discussions, une fois les calculs terminés, donneront pour l'ellipsoïde de référence des dimensions qui seront bien près de pouvoir être considérées comme définitives.

Toutes ces opérations n'ont fait que confirmer et développer les résultats que l'on avait obtenus à la fin du XVIII^e siècle, et qui avaient montré que la Terre est réellement dans son ensemble un ellipsoïde de révolution aplati dans le sens de son axe de rotation, c'est-à-dire de la ligne des pôles.

Cet aplatissement est d'ailleurs si faible et la figure mathématique de la Terre, le géoïde, défini par la surface des mers prolongée, partout perpendiculaire à la direction de la pesanteur, diffère si peu d'une sphère parfaite, que nous sommes en droit de négliger tout à fait ces écarts dans la description des procédés de la géodésie et de n'en tenir compte que dans les calculs.

CHAPITRE XVII.

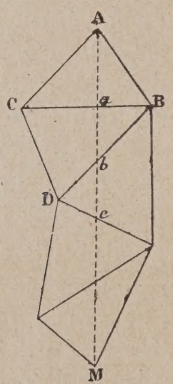
OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES POUR LA MESURE D'UN ARC DE MÉRIDIEN.

La mesure d'un arc de méridien ne se fait pas, comme on l'a dit déjà précédemment, directement mais par l'intermédiaire d'un réseau de triangles, dont les sommets sont choisis de part et d'autre du méridien en question.

Soit AM le méridien qu'il s'agit de mesurer :

1° On choisit de part et d'autre de cette ligne des points B, C, D, ... (*fig.* 110) de manière à former une chaîne de triangles dont

Fig. 110.



on mesure les angles et un côté, de sorte que, de proche en proche, le calcul de ces triangles fasse connaître tous les côtés.

2° En A, on détermine astronomiquement la direction du méridien, c'est-à-dire l'azimut CAa, ce qui permettra, comme nous le verrons plus loin, en y joignant les éléments mesurés et calculés des triangles, de calculer la longueur de l'arc de méridien.

3° On détermine les colatitudes λ et λ' des extrémités A et M de l'arc ainsi mesuré.

Les opérations géodésiques sur le terrain comprennent :

1° La reconnaissance du terrain, le choix des signaux et la construction des signaux.

2° La mesure des angles des triangles.

3° La détermination d'un des côtés à l'aide de la mesure d'une base, et la jonction de cette base au susdit côté.

4° L'altitude de cette base doit avoir été déterminée exactement par un nivellement géodésique ou géométrique, afin de pouvoir la réduire au niveau de la mer.

Remarques sur les triangles géodésiques.

Ce que nous voulons déterminer, ce sont les dimensions de l'ellipsoïde qui s'écarte le moins du géoïde. Nos opérations sont faites sur la surface réelle de la Terre, et si l'on se rapporte à ce que nous avons dit des observations, on voit que les angles mesurés au théodolite ou au cercle azimutal, dont l'axe principal s'identifie avec la verticale de la station, sont les angles des triangles que nous avons à considérer (1), de même la base a été réduite au niveau de la mer, c'est-à-dire au géoïde; nous nous trouvons donc dans les conditions requises pour effectuer les calculs. Mais ainsi que nous allons le montrer sommairement, en réservant d'en faire une démonstration plus complète au Chapitre XIX, la petitesse des côtés des triangles, par rapport au rayon de la Terre, permet d'apporter dans le calcul de ceux-ci de grandes simplifications.

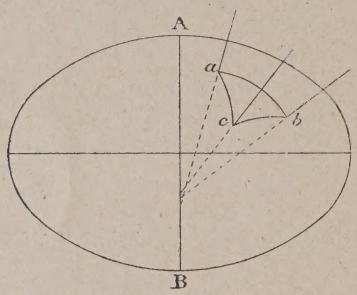
Considérons le triangle ABC, et soit *abc* sa projection sur l'ellipsoïde. Les normales en *a*, *b*, *c* ne concourent pas au même point. Mais, étant donnés les faibles dimensions des côtés du triangle par rapport à la longueur des axes de l'ellipsoïde et le faible écart qui existe entre l'ellipsoïde terrestre et la sphère, ces trois normales concourront presque au même point, et passeront

(1) Sous réserve de deux très petites corrections que nous établirons au Chapitre XXVI et dont nous faisons momentanément abstraction.

par un anneau très étroit aux environs du centre de courbure correspondant à un point placé au centre du triangle (*fig.* 111).

Les lignes *ab*, *bc*, *cd*, qui limitent le triangle sphéroïdique, sont des lignes à double courbure, dites lignes géodésiques, plus courts chemins d'un sommet à l'autre. Ces lignes diffèrent des deux

Fig. 111.



sections normales passant par les points *a* et *b*. En *a*, on a la section normale intersection de la surface par un plan passant par la normale en *a* et le point *b*, et la contre-section normale, intersection par le plan mené par la normale en *b* et le sommet *a*. Le calcul montre que sur l'ellipsoïde terrestre l'écart transversal entre les deux sections, normale et contre-normale, et la ligne géodésique au point où ces lignes divergent le plus ne dépasse pas quelques millimètres pour les plus grands côtés géodésiques.

L'angle mesuré en A est, comme nous l'avons dit, l'angle plan du dièdre ayant pour arête la normale en A avec laquelle on a identifié l'axe de l'instrument de mesure d'angles et pour faces les plans passant par cette normale et les sommets opposés. Les angles mesurés sont donc ceux compris entre les tangentes aux deux sections normales issues de *a* et non ceux formés par les tangentes aux lignes géodésiques. Mais la correction atteint à peine quelques centièmes de seconde pour des triangles de 40^{km} de côté.

On peut donc se considérer tout d'abord comme autorisé à prendre sur l'ellipsoïde, comme longueur de la ligne géodésique, celle de l'une quelconque des deux sections normales et comme angles ceux directement mesurés.

Nous allons voir que l'on peut, en outre, calculer chaque

triangle comme un triangle sphérique, sur la sphère tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle d'un des sommets projetés, le sommet a par exemple.

Comme nous le verrons plus loin, on démontre dans la théorie générale des surfaces, que, pour qu'un élément d'une surface quelconque, supposé flexible, puisse s'appliquer sur une sphère, sans extension, sans déchirure et sans duplicature, il faut et il suffit que cette sphère ait pour rayon $\sqrt{RN}$, R et N étant les rayons de courbure principaux de la surface en un point moyen de l'élément considéré. Dans la superposition de l'élément de surface à la sphère, les angles sont alors conservés, ainsi que les longueurs. Les angles des triangles sphéroïdiques deviennent donc sans altération les angles des triangles sphériques et les côtés, plus courte distance entre deux sommets, deviennent des arcs de grands cercles. Quand les côtés des triangles géodésiques ne dépassent pas 40^{km} à 50^{km}, $\sqrt{RN}$ est sensiblement égal à N, longueur de la grande normale au point moyen, ou sans erreur sensible, à l'un quelconque des sommets, en a par exemple. La sphère considérée est donc celle tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle du sommet considéré; elle est, comme nous le verrons, tangente extérieurement à l'ellipsoïde.

Choix des stations. Forme des triangles sphériques.

Les opérations géodésiques, choix des stations, méthode de mesure des angles, mesure des bases, etc., sont les mêmes dans les opérations de mesure d'un arc de méridien et dans celles relatives aux triangulations destinées à l'établissement d'un réseau géodésique quelconque.

Ce que nous dirons s'appliquera donc indistinctement à l'une ou à l'autre de ces opérations.

On choisit les emplacements des stations en cherchant à donner aux triangles la meilleure forme théorique possible.

Pour résoudre le triangle ABC, où les trois angles et un côté a sont connus, on a

$$\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}.$$

En différentiant logarithmiquement, on a

$$\frac{db}{\operatorname{tang} b} = \frac{da}{\operatorname{tang} a} + \frac{d\mathrm{B}}{\operatorname{tang} \mathrm{B}} - \frac{d\mathrm{A}}{\operatorname{tang} \mathrm{A}},$$

et, en donnant aux différentielles le sens d'erreurs probables,

$$\frac{\partial b}{\operatorname{tang} b} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\operatorname{tang} a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\operatorname{tang} \mathrm{B}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\operatorname{tang} \mathrm{A}}\right)^2}.$$

L'influence d'erreurs inévitables ∂A et ∂B dans la mesure des angles sera d'autant moindre que ces angles seront plus près de 90°. On satisfait autant que possible à cette condition en adoptant la forme équilatérale. Tout triangle dont l'un des angles différerait trop de 60° doit être rejeté.

Les triangles de premier ordre ont de dix à quinze lieues de côté. Leurs dimensions sont en effet limitées par cette condition que, de chaque sommet, il faut pouvoir viser les sommets voisins. En pays de plaine, cette condition exige la construction de signaux très élevés, rien que par l'effet de la courbure de la Terre.

Si a et b sont les extrémités d'un côté, il faudra y élever deux signaux aA, bB, tels que : arc $ab < 3800^{m}(\sqrt{h} + \sqrt{h'})$, h, h' étant les hauteurs de ces signaux (*voir* 1^er^ fasc., p. 10). On en tire, en supposant $h = h'$,

$$h > \left(\frac{ab}{7600}\right)^2.$$

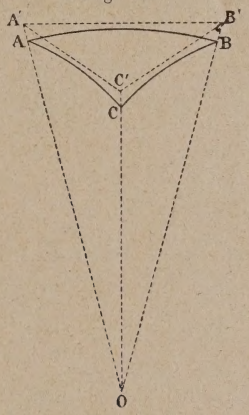
En pays de plaine, on aura donc les résultats suivants pour les hauteurs qu'il faut donner aux signaux, et même dépasser sensiblement afin que la trajectoire visuelle ne rase pas le sol de trop près.

Longueur des côtés.	Hauteur des deux signaux.
	m
5 lieues.....	7
6 »	10
7 »	13,6
8 »	17,8
9 »	22,5
10 »	27,7

Mesure des angles des triangles.

On se servait autrefois du cercle répétiteur de Borda pour mesurer les angles plans du triangle formé par trois signaux consécutifs, A′, B′, C′ (*fig.* 112). Mais, comme on a besoin du triangle sphérique ABC tracé sur la surface terrestre par les pieds des verticales des trois signaux, il fallait en déterminer les angles dièdres tels que B′A′OC′=A. Pour cela, considérons le trièdre ayant pour arêtes la verticale A′Z et les côtés A′B′, A′C′. En mesurant en A′

Fig. 112.



les distances zénithales z et z' des deux signaux B′ et C′, et l'angle B′A′C′ ou l'angle a du triangle plan, on aura A par la formule

$$\cos a = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos A.$$

Évidemment, l'angle dièdre A du triangle sphérique ABC n'est rien autre que la projection, sur le plan horizontal en A, de l'angle plan B′A′C′. La très petite différence A — a, que nous désignerons par x, peut se déduire de la formule précédente en profitant de ce que les distances zénithales z et z' diffèrent peu de 90°. Cette différence A — A′ se nomme *réduction de l'angle* B′A′C′ *à l'horizon*. Pour l'obtenir, remplaçons z et z' par 90° — h et 90° — h', et A par $a + x$, nous aurons

$$\cos a = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos(a + x),$$

et nous développerons en série les sin et cos des petits angles h, h' et x en négligeant les termes du quatrième ordre en h et h', ainsi que les termes du deuxième ordre en x, parce que x est déjà du deuxième ordre (si h et h' sont du premier); on aura ainsi

$$\cos a = hh' + \cos a - x \sin a - \frac{1}{2}(h^2 + h'^2)\cos a.$$

En mettant $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}a$ à la place de $\cos a$, il vient

$$x \sin a = -\frac{1}{2}(h - h')^2 + (h^2 + h'^2)\sin^2\frac{1}{2}a.$$

Enfin, multipliant $\frac{1}{2}(h - h')^2$ par $\cos^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}a$, on obtient, après réduction,

$$x \sin a = \frac{1}{2}(h + h')^2 \sin^2\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(h - h')^2 \cos^2\frac{1}{2}a,$$

ce qui revient à

$$x = \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}a - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \cot\frac{1}{2}a,$$

expression dont le deuxième membre doit être divisé par $206265''$ ou multiplié par $\sin 1''$ pour donner x en secondes.

Aujourd'hui on emploie pour la mesure des angles, soit le cercle azimutal réitérateur pour les triangulations primordiales, soit le théodolite pour les triangulations secondaires.

L'axe principal de ces instruments coïncidant avec la verticale du centre de la station, on obtient immédiatement l'angle plan du dièdre ayant comme arête la verticale de la station et dont les faces passent par les deux signaux visés. On mesure donc ainsi, directement, les angles d'une série de triangles sphériques tracés sur une même surface de niveau.

On pourrait ne mesurer que deux des trois angles A, B et C et conclure le troisième de la relation

$$A + B + C = 180^\circ + \text{excès sphérique}$$

ou

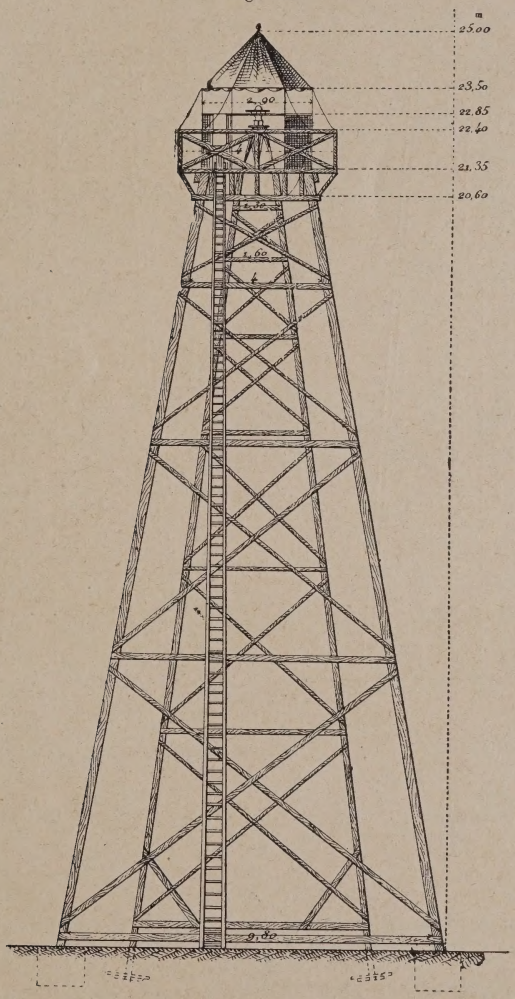
$$A + B + C = 200^G + \text{excès sphérique}.$$

On s'astreint cependant toujours à mesurer les triangles, de façon à pouvoir corriger les valeurs observées des effets des erreurs accidentelles.

Signaux et réduction au centre de la station.

En pays de plaine on est obligé, comme on l'a vu plus haut, de construire de hautes tourelles en maçonnerie analogues aux che-

Fig. 113.



minées d'usines, ou des charpentes très élevées en forme de pyramide, pour porter l'observateur et son instrument. On a

renoncé autant que possible à se servir des clochers. Les figures 113, 114 et 115 donnent une idée assez nette de ces constructions.

L'important est que le pilier central sur lequel repose l'instrument n'ait pas de points de contact avec la pyramide ni avec le plancher sur lequel se place l'observateur. La petite tige verticale (ou l'axe de la mire), sur laquelle l'observateur placé à la station voisine devra pointer sa lunette, doit se projeter bien exactement au centre du pilier, ce qu'on vérifie à l'aide du fil à plomb ou à

Fig. 114.

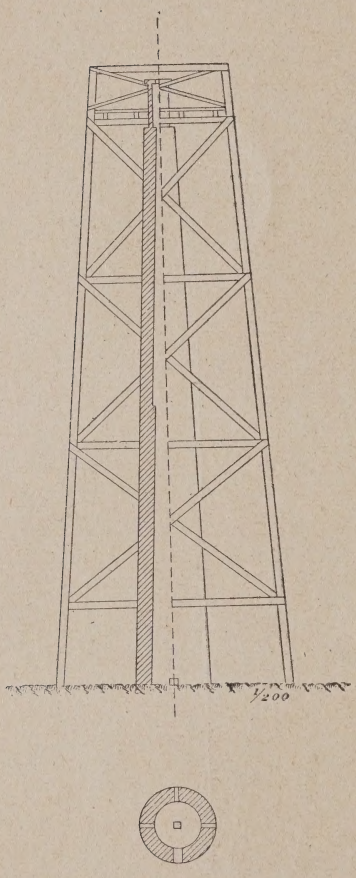
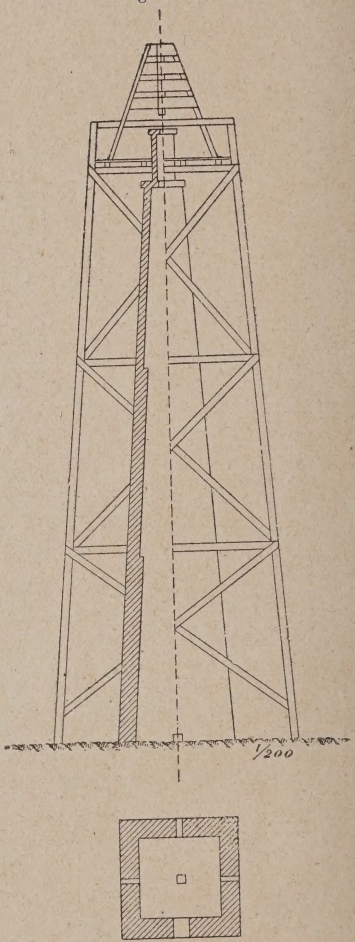


Fig. 115.

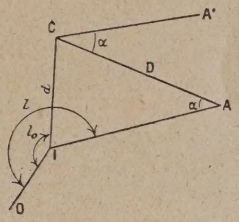


l'aide d'une lunette plongeante, sorte de théodolite spécial dont la lunette est verticale.

Il arrive quelquefois que l'on ne peut installer l'instrument au centre même de la station géodésique. Il faut alors faire subir aux angles observés une correction dite de réduction au centre de station.

Soient C le centre de station, I le centre du cercle limbe de l'instrument azimutal; A le point visé, IO le rayon du cercle

Fig. 116.



limbe correspondant au zéro de la graduation. Transportons l'instrument parallèlement à lui-même de I en C; la correction à apporter à la lecture l correspondant à la visée IA est égale au petit angle α, le signal A étant toujours suffisamment éloigné pour que CA' puisse être considéré comme parallèle à IA.

Soient d la distance IC, mesurée directement; l_0 la lecture faite sur le cercle limbe correspondant à la visée IC; D la distance CA, obtenue par un calcul provisoire, en considérant, ce qui est suffisant pour le calcul de la correction, comme faites au centre les stations excentrées, on aura

$$\sin\alpha = \frac{d}{D}\sin(l - l_0) \qquad \text{ou} \qquad \alpha'' = \frac{d}{D\sin 1''}\sin(l - l_0).$$

On corrigera ainsi toutes les directions observées autour du point I et l'on obtiendra celles que l'on aurait observées si l'instrument avait pu être placé au centre de station.

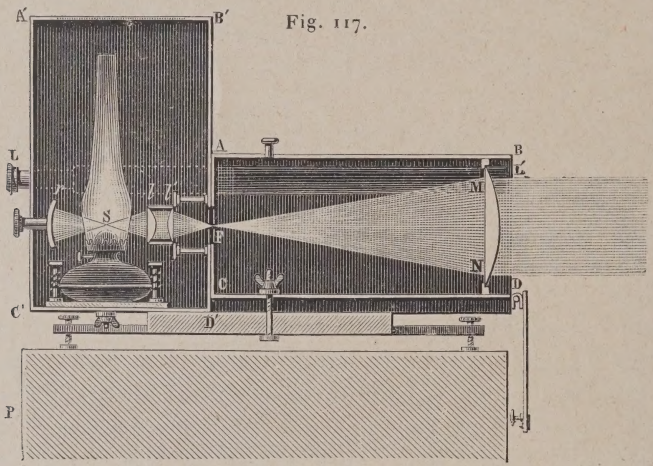
Signaux lumineux; phares ou héliotropes.

Dans les opérations de haute précision, on fait souvent usage, au lieu de mires en bois ou en pierres, de signaux lumineux sur lesquels les pointés sont beaucoup plus précis. Ces signaux sont

soit des miroirs qui renvoient la lumière solaire, dans les opérations de jour, soit des phares utilisant des lampes ou la lumière électrique, dans les opérations de nuit, qui ont l'avantage de donner des images sans aucune ondulation, l'atmosphère étant alors dans un calme beaucoup plus grand que pendant la journée.

1° *Signaux de nuit; phare du colonel Mangin* (*fig.* 117). — Il suffit de donner ici le dessin de cet ingénieux appareil dont la

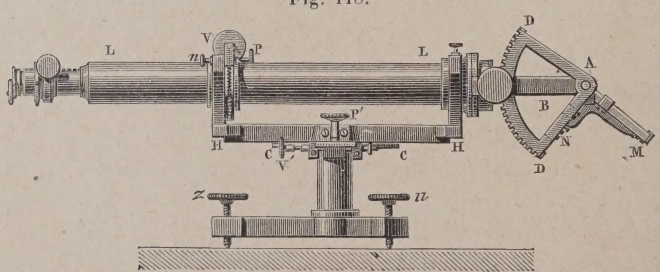
Fig. 117.



source lumineuse, une simple lampe à pétrole, peut être remplacée par la lumière bien plus intense que fournit l'électricité.

2° *Signaux de jour; héliotrope de Gauss* (*fig.* 118 et 119). —

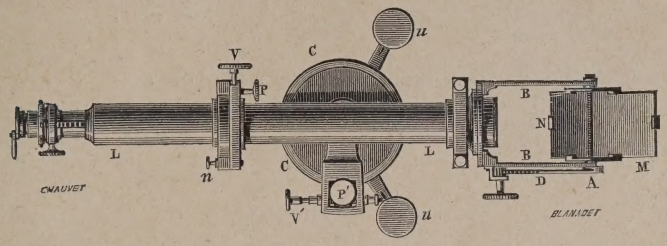
Fig. 118.



L'héliotrope de Gauss se compose d'une lunette montée sur un trépied, comme le théodolite, et munie, en avant de l'objectif, de

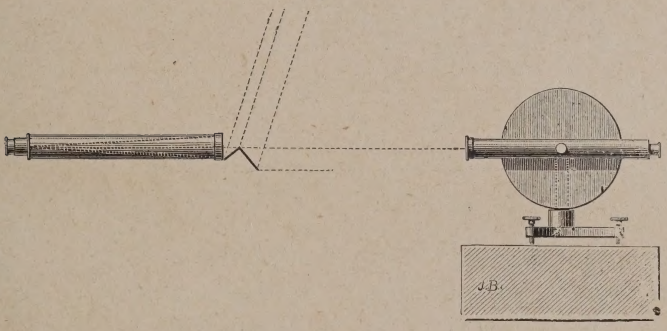
deux miroirs assemblés à angle droit, qui ne recouvrent que la moitié de cet objectif.

Fig. 119.



En faisant tourner ces miroirs jusqu'à ce que l'un d'eux envoie les rayons réfléchis du Soleil dans la lunette, où ils forment une image de cet astre, l'autre miroir enverra un faisceau de rayons solaires dans la direction diamétralement opposée, et, si la lunette de l'héliotrope est dirigée sur l'instrument de l'observateur, la lunette de celui-ci recevra un faisceau de rayons très sensiblement

Fig. 120.



parallèles, qui formeront au foyer une image semblable à celle d'une étoile, sur laquelle il sera facile de pointer avec une grande précision (*fig.* 120).

La théorie de cet instrument, que l'on peut utiliser pour envoyer au loin des signaux télégraphiques, est bien simple. Pour que l'image perçue par l'observateur fût celle du Soleil tout entier, il faudrait que le miroir eût des dimensions telles que, vu de la station, il sous-tendît, comme le Soleil lui-même, un angle de 32′. Soient d cette dimension, et 40000^{m} la distance de l'observateur,

car telle est la plus grande longueur des côtés de nos triangles. On devra avoir

$$3438' \frac{d}{40000} = 32', \qquad \text{d'où} \qquad d = 400^{m}.$$

Comme on ne lui donne pas même $0^{m},1$ de côté, l'image qu'il enverra à l'observateur n'aura pas $\frac{0,1}{400}$ ou $\frac{1}{4000}$ du diamètre du Soleil, ce qui répond à

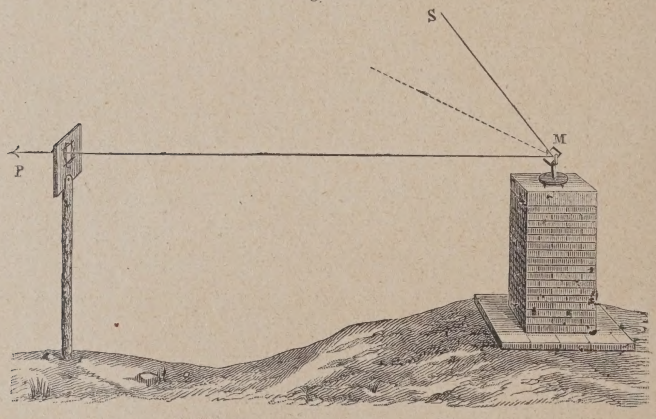
$$\frac{32'}{4000} = \frac{1920''}{4000} = 0'',40.$$

L'image vue dans la lunette sera donc un point lumineux semblable à une étoile.

Ce genre de signaux serait parfaitement perceptible à une quarantaine de lieues, s'il était possible à l'observateur ou au porteur de l'héliotrope de se poster au sommet d'une cime assez élevée.

Cet instrument a été rendu très pratique, grâce à une grande simplification qu'y a apportée le Service géographique de l'Armée.

Fig. 121.



Il se réduit à un miroir mobile autour de deux axes rectangulaires, l'un vertical et l'autre horizontal, et posé sur le pilier de la station précédemment occupé par le théodolite, juste dans les mêmes repères, de manière à éviter toute réduction au centre de la station. Un aide manœuvre ce miroir à la main et se guide, pour diriger le faisceau de lumière solaire qu'il doit envoyer au théodolite de

l'observateur, sur une planchette percée d'un trou circulaire dont le faisceau lumineux doit éclairer le pourtour.

Méthodes d'observation.

Dans toutes les opérations géodésiques, il y a toujours, en chaque station, plusieurs directions à observer, c'est-à-dire plusieurs angles à déterminer.

On peut employer deux méthodes, celle par tours d'horizon et celle par mesure directe des angles.

La *méthode par tours d'horizon* consiste à observer toutes les directions issues de la station A, les unes à la suite des autres, dans un sens déterminé, et à rapporter toutes ces directions à l'une d'entre elles, prise comme direction origine ou direction de référence. Les angles s'obtiennent alors par différence.

On fait d'ordinaire à chaque station 20 tours d'horizon dans les opérations primordiales, 10 tours dans les opérations secondaires, 2 ou 4 tours pour la détermination des points topographiques.

On emploie la méthode de la réitération en changeant d'origine à chaque tour d'horizon. Supposons 20 tours d'horizon avec un cercle horizontal à 4 microscopes, gradué en division centésimale; on prendra des origines distantes de $\frac{400^G}{4 \times 20} = \frac{100^G}{20} = 5^G$, c'est-à-dire 0^G, 5^G, 10^G, ..., 95^G. On croisera autant que possible les opérations de façon à éliminer de petites erreurs insoupçonnées. C'est ainsi que l'on fera les tours d'horizon d'ordre pair dans le sens direct, par exemple, et ceux d'ordre impair dans le sens rétrograde; enfin, dans l'ensemble des tours d'horizon d'un sens déterminé, on en fera la moitié dans la position de la lunette, tambour du micromètre à droite de l'opérateur, et la seconde moitié après avoir retourné la lunette sur ses tourillons et l'avoir mise dans la position tambour à gauche.

Cette méthode serait parfaite, si tous les signaux étaient toujours visibles, de façon que les tours d'horizon soient toujours complets. Il n'en est souvent pas ainsi et il faut alors grouper entre elles, pour constituer le tour d'horizon, des observations faites dans des conditions différentes.

On emploie donc en général depuis un certain nombre d'années une autre méthode, celle de la *mesure directe des angles*.

Son principe consiste à mesurer individuellement tous les angles formés par les n directions prises deux à deux. Le nombre des angles à mesurer est donc celui des combinaisons de n angles deux à deux.

Pour une station à cinq directions, il y aura dix angles à mesurer :

$$\begin{array}{llll} 1-2 & 2-3 & 3-4 & 4-5 \\ 1-3 & 2-4 & 3-5 & \\ 1-4 & 2-5 & & \\ 1-5 & & & \end{array}$$

La méthode permet d'observer dès que l'on aperçoit deux signaux quelconques ; on peut donc faire tout d'abord, quand le temps est favorable, les mesures d'angles comportant les directions où les signaux sont les plus difficiles à voir.

La mesure d'un angle AB dans cette méthode comprend deux opérations, l'une dans le sens direct, la lunette dans la première position, l'autre dans le sens rétrograde, la lunette ayant été retournée sur ses tourillons. L'ensemble des deux mesures est ce qu'on appelle un couple.

Il peut arriver que dans les opérations d'une grande triangulation on emploie les deux méthodes ; il faut régler les mesures de façon qu'une mesure d'angle ait le même poids dans les deux cas.

Dans la méthode par tours d'horizon, si p est le nombre des séries, chacune des n directions aura le poids p en prenant pour unité de poids celui d'une direction isolée. On règle le nombre q' des couples dans la seconde méthode, q étant le nombre total des mesures d'un angle et $q' = \frac{q}{2}$, de façon qu'une direction observée ait le même poids dans les deux méthodes.

Le poids d'une direction étant un, celui d'un angle est $\frac{1}{2}$, et celui des q mesures directes d'un angle sera donc, $\frac{q}{2} = q'$.

Mais on obtient encore cet angle par $n - 2$ mesures indirectes, sommes ou différences d'angles mesurés directement et de poids q' ; chaque mesure indirecte a donc comme poids $\frac{q'}{2}$ et le poids total de l'angle sera

$$q' + (n-2)\frac{q'}{2} = \frac{nq'}{2};$$

le poids d'une direction, qui est double, doit être égal à p, nombre des tours d'horizon dans la première méthode, donc

$$nq' = p, \qquad q' = \frac{p}{n}.$$

On applique encore la méthode de la réitération et les q' mesures d'un même angle sont réparties sur un même nombre d'origines différentes, espacées de $\frac{100^G}{q'}$ dans le cas d'un instrument à quatre microscopes.

Il y a lieu de faire encore une remarque importante. Dans la méthode des tours d'horizon, les directions étant toutes rapportées à la direction de référence, on obtient à chaque station une valeur et une seule pour chaque angle. Dans la méthode de mesure directe des angles, au contraire, chaque angle est mesuré séparément et, comme il y a toujours de petites erreurs d'observation, on obtiendra des valeurs un peu différentes, suivant que l'on considérera la mesure directe, ou les valeurs fournies par les autres combinaisons. Il faut donc faire à chaque station ce que l'on appelle la compensation de station, qui consiste à répartir les erreurs d'observation par la méthode des moindres carrés, de façon à n'obtenir en définitive qu'une seule valeur pour chaque angle, quelle que soit la combinaison employée.

Mesure des bases.
Considérations générales.

Le seul procédé actuel précis et pratique pour mesurer la longueur d'une base géodésique, c'est-à-dire la longueur du premier côté d'une triangulation, est la mesure directe avec une règle, étalonnée aussi rigoureusement que possible par comparaison avec l'étalon de mesure prototype, les mesures sur le terrain étant faites de façon que chaque portée de la règle parfaitement alignée sur la direction de la base soit exactement la suite de la portée précédente.

La mesure d'une base est une des opérations les plus délicates de la géodésie.

Tout d'abord, elle exige, à proximité du réseau, un terrain bien

plat d'une dizaine de kilomètres, longueur ordinaire des bases géodésiques (1), terrain qui doit en outre, comme nous le verrons plus loin, pouvoir se prêter aussi à la jonction, dans les meilleures conditions théoriques possibles, de la base au réseau.

Il faut ensuite que l'étalonnage de la règle ait été fait aussi rigoureusement que possible, ainsi que la détermination des coefficients de dilatation du ou des métaux qui constituent la règle. Ces opérations préliminaires se font au Bureau International des Poids et Mesures, dont le siège est à Sèvres, et où est conservé le mètre prototype.

Enfin, afin de pouvoir ramener la longueur des différentes portées à une même température pour en conclure la longueur de la base en fonction du mètre, qui est par définition la longueur *à zéro degré* de l'étalon prototype, il faut connaître très exactement la température de la règle à chaque portée. Cette détermination, qui doit être faite sur le terrain au cours de la mesure, est très délicate. Le milieu ambiant, en effet, n'est jamais en équilibre parfait de température ; d'autre part, la règle ne suit pas instantanément les variations de température du milieu, il y a toujours une phase de retard, et cette phase est variable ; on ne peut donc admettre pour la règle la température de l'air ambiant mesurée au thermomètre. Le procédé consistant à noyer les thermomètres dans la masse du métal de la règle serait également insuffisant, car le contact entre les thermomètres et le métal ne serait pas parfait, et de plus il y aurait encore une phase entre les variations de température du métal de la règle et du corps thermométrique.

Opérations de la fin du XVIII^e^ siècle. Appareil de Borda.

On a donc, lors des grandes opérations géodésiques de la fin du XVIII^e^ siècle, cherché à remédier à ces inconvénients, et Borda imagina l'emploi de règles bimétalliques de façon que la règle soit elle-même son propre thermomètre.

---

(1) On ne pourrait, en effet, dans la plupart des cas, trouver un terrain se prêtant à une mesure d'une quarantaine de kilomètres, longueur moyenne des côtés géodésiques d'une chaîne primordiale. On est donc forcé de mesurer une base d'une longueur sensiblement moindre, que l'on rattache ensuite au réseau par une triangulation spéciale.

Les règles bimétalliques de Borda étaient formées de deux règles, l'une de platine, l'autre de cuivre, soudées à l'une de leurs extrémités et pouvant se dilater librement à l'autre bout. La règle inférieure, qui est celle de platine, avait une longueur de 2 toises environ; la règle supérieure, qui est celle de cuivre, était plus courte de 6 pouces; elle servait uniquement à la détermination de la température par la différence de sa dilatation avec celle de la règle de platine. A cet effet, la règle de platine portait à son extrémité libre une réglette divisée, en cuivre, fixée sur la partie supérieure. Cette réglette s'encastrait dans une fenêtre rectangulaire pratiquée dans la règle de cuivre, et sur la tranche de cette fenêtre était tracé un trait de repère. Le déplacement de ce trait par rapport à la graduation de la réglette indiquait la dilatation relative des deux règles.

Soient δ cette dilatation relative à la température t, α et β les coefficients de dilatation des deux règles, on aura

$$\delta = l_0(\alpha - \beta)(t - t_0), \qquad \text{d'où} \qquad l_0\alpha(t - t_0) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\delta,$$

et l'on connaîtra ainsi, l_0 étant la longueur de la règle de platine à la température t_0 donnée par l'étalonnage, $l_0\alpha(t - t_0)$, terme correctif à ajouter à chaque portée, et la température t.

Voici alors comment se faisaient, avec cet appareil, les opérations de mesure de la base.

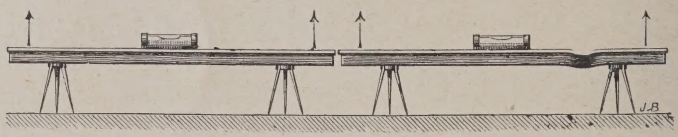
Sur le terrain bien plat, choisi pour les opérations à proximité du réseau, on établit deux piliers destinés à fixer les extrémités d'une base de 10^{km} à 12^{km}. Pour la jalonner, on place vers le milieu de cette base, et dans sa direction, une lunette semblable à la lunette méridienne, dont on rectifie avec le plus grand soin la ligne de visée, de manière à la rendre bien perpendiculaire à l'axe de rotation rendu lui-même parfaitement horizontal. Les piliers des extrémités ne doivent même être définitivement scellés qu'après qu'on se sera assuré que le fil vertical de la lunette, tournée alternativement vers les mires qu'ils portent, les bissecte exactement. On fait ensuite planter des jalons en nombre convenable, de manière qu'ils se projettent tous sur le fil vertical de la lunette.

Dans l'alignement ainsi tracé, on place bout à bout trois règles bimétalliques de 2 toises ou 4^m environ, portées sur des traverses

de bois et sur des chevalets. Elles sont nivelées avec soin. On estime ensuite leur température par la différence de dilatation entre les deux règles cuivre et platine. Enfin, on mesure, à l'aide de languettes mobiles à verrous munies de verniers le petit intervalle laissé à dessein entre leurs bouts afin d'éviter les chocs.

Puis, laissant en place les deux dernières règles, on enlève la première qu'on reporte plus loin, bout à bout à la suite de la dernière, toujours en évitant le contact, et l'on opère sur cette seconde portée comme sur la précédente (*fig.* 122).

Fig. 122.



Lorsque le terrain n'est pas bien horizontal, on mesure l'inclinaison de chaque règle avec le niveau.

Pour une base de 12 000^{m}, il faut ainsi placer bout à bout 3000 portées. L'opération dure environ un mois. A la fin de chaque journée, on fixe sur le sol le point auquel on est arrivé, et pour cela on enfonce en terre un fort piquet vers le bout libre de la dernière règle. On marque un point sur la tête du piquet; on y laisse tomber un fil à plomb touchant en haut la languette de la règle. Le lendemain, pour recommencer, on replace le fil à plomb, et par suite la règle de la veille dans la même position.

Soient l_0 la longueur à 0° d'une de ces règles en platine, étalonnée avec soin sur la toise du Pérou, ancienne unité linéaire des géodésiens, ou aujourd'hui sur le mètre étalon du Bureau International, α son coefficient de dilatation, θ sa température à partir de zéro, v le petit intervalle laissé à dessein entre deux règles consécutives et mesuré au moyen d'une languette à verrou munie d'un vernier, i son inclinaison sur l'horizontale; la longueur de la base sera, en désignant par n le nombre des portées,

$$B = nl_0 + \Sigma v + (l_0 + v)\,\Sigma\alpha\theta - 2(l_0 + v)\,\Sigma \sin^2 \frac{1}{2} i.$$

Opérations actuelles. Métal invar. Règles monométalliques. Appareils à fils.

Depuis l'époque de Borda, les appareils de mesure de bases se sont beaucoup perfectionnés, mais les principes de la méthode de mesure sont restés les mêmes.

Vers 1850, Porro, ingénieur italien, eut l'idée de simplifier considérablement l'ensemble des appareils, en n'employant plus qu'une seule règle. Au lieu de placer successivement plusieurs règles les unes à la suite des autres, on aligne rigoureusement, à l'aide d'une lunette bien réglée, sur la direction de la base, une série de microscopes dont les axes optiques sont rendus verticaux; ces microscopes sont distants l'un de l'autre d'à peu près la longueur de la règle. Cette dernière est, comme dans l'appareil de Borda, formée de deux règles, l'une de cuivre, l'autre de platine, mais les deux règles sont fixées l'une à l'autre en leur milieu et se dilatent librement à leurs deux extrémités. Les divisions tracées aux extrémités des règles, et qui servent à évaluer leur dilatation relative, sont en dixièmes de millimètre. La règle est portée successivement sous chaque paire de microscopes et l'on mesure ainsi la distance comprise entre les axes de deux microscopes successifs en même temps que la dilatation relative des deux règles, d'où l'on conclut le terme correctif de chaque portée. Les microscopes sont munis de micromètres qui permettent d'évaluer le centième d'une division des règles, c'est-à-dire le micron. On dispose d'ordinaire de quatre microscopes au moins, de façon à avoir toujours au moins une portée préparée à l'avant de celle que l'on mesure et une en cours de préparation.

Les appareils bimétalliques ont été en usage jusqu'aux premières années du XX^e^ siècle. C'est avec eux qu'ont été mesurées toutes les bases fondamentales des grandes opérations géodésiques du XIX^e^ siècle. Cependant, ces appareils eux-mêmes ne sont pas exempts de toute critique. Si Δt est la variation de température d'une des règles pendant l'unité de temps, Δt est proportionnel au pouvoir absorbant, à la conductibilité et à la surface de la règle, et inversement proportionnel à son volume, à sa densité et à sa chaleur spécifique. Or, si l'on peut faire varier à volonté les dimen-

sions, dans la surface et le volume de la règle, on ne peut disposer des autres facteurs qui sont des caractéristiques de chaque métal. Les variations de température des deux règles ne sont donc pas les mêmes dans le même intervalle de temps, puisque les conditions théoriques qui devraient être remplies ne le sont dans aucun des appareils existants.

On a cherché à remplacer les appareils bimétalliques par des appareils monométalliques dont on pourrait connaître très exactement la température.

Des études dans cet ordre d'idées ont été entreprises vers 1885 au Bureau International des Poids et Mesures, dont le siège est à Sèvres, au Pavillon de Breteuil. Ces études ont conduit MM. Benoît et Ch.-Éd. Guillaume, alors directeur et directeur adjoint de l'établissement, à la découverte d'un alliage d'acier et de nickel, dans la proportion de 36 pour 100 de ce dernier métal, dont le coefficient de dilatation est excessivement faible et égal à $(0,877 + 0,00127\,\theta)10^{-7}$ entre la température de 0° et de θ°, alliage auquel on a donné le nom de *métal invar*.

Avec une règle monométallique en invar, on peut évidemment se contenter, pour l'évaluation de la température de la règle, de celle donnée par des thermomètres noyés dans le métal de la règle. Une erreur de 1°, en effet, dans l'évaluation de la température d'une règle de 4^{m}, ne causerait qu'une erreur de $0^{\mu},4$ sur la longueur de la règle. En admettant que cette erreur soit systématique, elle ne produirait, sur une base de 12^{km}, qu'une erreur totale de $0^{m},006$, soit du $\frac{1}{2000000}$ de la longueur de la base. L'emploi des règles en métal invar est donc aujourd'hui devenu général et l'on peut dire même que la précision des mesures en a été notablement augmentée.

Dans le modèle que possède le Service géographique de l'Armée, la règle en métal invar porte à chacune de ses extrémités un trait de repère. Les microscopes peuvent coulisser sur leur bâti au moyen de vis à très petit pas et sont manœuvrés par les opérateurs de façon qu'à un même instant les croisées des fils de leurs réticules respectifs coïncident avec les traits de repère des extrémités de la règle. Il ne reste plus qu'à lire le thermomètre et le niveau, ce que fait un aide opérateur, pour avoir exécuté la portée.

Les mesures de bases à l'aide des règles sont évidemment très

précises, mais ces règles, qu'elles soient bimétalliques ou monométalliques, sont lourdes; elles exigent en outre des microscopes et de nombreux accessoires. Enfin, elles ne peuvent être employées qu'en terrain très plan, ce qui est une difficulté et limite le choix des emplacements de bases.

On a donc cherché à rendre les appareils plus légers, plus portatifs, pouvant au besoin s'employer sur des pentes douces, n'exigeant pas un terrain préalablement débarrassé de tous les petits obstacles tels que broussailles, etc., quitte à sacrifier une partie de la précision. Le problème se posait tout spécialement au moment où l'on entreprenait, dans les colonies de tous les pays, de grandes opérations de triangulation pour l'établissement des cartes de ces régions.

Les études entreprises ont conduit à un type d'appareil tout à fait nouveau, dont le principe est dû à un géodésien suédois, Jäderin. Les règles sont remplacées par des fils métalliques de 24^{m}, tendus sous un effort constant de 10^{kg} à l'aide de poids suspendus, à chaque extrémité du fil, par une cordelette qui passe sur une poulie portée par un chevalet maintenu par un aide. La méthode de mesure reste la même : on aligne dans le plan de la base une série de trépieds placés à 24^{m} l'un de l'autre et dont les têtes portent chacune un trait de repère; le fil, dont les extrémités sont terminées par des réglettes divisées en millimètres, est tendu successivement au-dessus de chaque paire de trépieds dont on mesure ainsi l'écartement, ce qui constitue une portée. Les lectures se font à vue, au dixième de millimètre sur chaque réglette. Le fil prend toujours la forme d'une chaînette, mais la forme de cette chaînette importe peu, pourvu qu'elle soit constante et la même qu'à l'étalonnage, ce qui résulte de la constance des poids tenseurs.

Dans l'appareil primitif, antérieur à l'emploi du métal invar, on se servait de deux fils, l'un de cuivre et l'autre d'acier, et une portée consistait dans la mesure de l'écartement de chaque paire de trépieds au moyen du fil d'acier, suivie immédiatement d'une mesure au moyen du fil de cuivre. On concluait de ces deux opérations la dilatation relative des deux fils, d'où la température et enfin la longueur de la base, ramenée au fil d'acier, par exemple.

L'introduction du métal invar a fait supprimer le fil de laiton en permettant de se contenter, pour la détermination de la température, des indications d'un thermomètre donnant la température du milieu ambiant. La mise au point définitive des appareils à fil d'invar est due aux travaux de M. Ch.-Éd. Guillaume, aujourd'hui directeur du Bureau International des Poids et Mesures.

La difficulté de l'emploi des fils est leur transport. Il faut, en effet, les enrouler sur un tambour, et un enroulement risque toujours de modifier leur étalonnage. Pour éviter cet inconvénient, on travaille les fils avant leur étalonnage de façon qu'ils prennent d'eux-mêmes la courbure de leur tambour et qu'ils n'aient leur forme de chaînette que sous l'action des poids.

Vitesse des mesures de bases. Fins de journées.

La vitesse des mesures de base est variable suivant les appareils employés. On arrive à mesurer 100 portées de 4^{m} par jour, avec l'appareil bimétallique; 150 à 200 portées avec la règle monométallique en invar, soit 600^{m} à 800^{m}; enfin, on va à 1500^{m} au moins par jour avec l'appareil à fils d'invar. Quoi qu'il en soit, une mesure de base de 12^{km} environ exige toujours plusieurs journées de travail, et il faut à la fin de chacune d'elles marquer d'une façon précise et invariable l'extrémité de la dernière portée pour repartir exactement du même point le lendemain.

Nous avons dit déjà comment on opérait autrefois avec l'appareil de Borda. Aujourd'hui, dans les mesures à la règle, on remplace la lunette du dernier microscope, une fois la portée faite, par une lunette plongeante qui se substitue à elle axe pour axe. On a au préalable cimenté dans le sol une plaque-repère en bronze sur laquelle on place un petit appareil, dit de « fin de journée », formé d'une plaque circulaire percée d'un petit trou à son centre et que l'on déplace dans un cadre au moyen de deux vis rectangulaires jusqu'à ce que le centre du trou soit dans le prolongement de l'axe de la lunette plongeante, et l'on marque au moyen d'un poinçon d'acier le centre du trou sur la plaque-repère. A la reprise des opérations, on replace l'axe optique de la lunette plongeante dans la verticale du point de repère et on lui substitue ensuite le microscope.

Dans l'appareil à fils, on se sert d'un fil à plomb suspendu sous le dernier trépied au lieu de lunette plongeante.

Degré de précision des mesures des bases.

La mesure d'une base peut être affectée de trois sortes d'erreurs : celles provenant de l'étalonnage, celles provenant de la détermination de la température, enfin celles provenant des erreurs accidentelles d'observation à chaque portée. Les deux premières sont systématiques et sont multipliées par le nombre des portées, ou la longueur de la base; les troisièmes sont accidentelles et la valeur de l'erreur moyenne d'une portée est multipliée par la racine carrée du nombre des portées.

Désignons par δl_0 l'erreur probable d'étalonnage, $\delta\theta$ l'erreur probable sur la température, δv l'erreur probable d'une observation de portée, le carré de l'erreur probable de la base de longueur B sera, n étant le nombre de portées et α le coefficient de dilatation de la règle de platine ou d'invar,

$$\overline{n\delta l_0}^2 + \overline{B\alpha\delta\theta}^2 + \overline{\sqrt{n}\,\delta v}^2,$$

en supposant que les inclinaisons i aient été bien mesurées et que les portées aient été exactement placées sur l'alignement général.

La vérification d'une mesure de base peut se faire en faisant une seconde fois la mesure entière. On a ainsi, par la comparaison des deux mesures, une indication très sérieuse relativement à la précision de la mesure. Mais cette nouvelle mesure allonge beaucoup les opérations faites avec les règles, opérations qui sont onéreuses et exigent un nombreux personnel, aussi se contente-t-on souvent de ne remesurer qu'un segment de la base. Par contre, des doubles et même triples mesures peuvent être assez facilement faites quand on se sert des appareils à fils.

En France, on a mesuré deux fois la base fondamentale de Paris lors des opérations géodésiques de la nouvelle méridienne; dans les opérations de la mesure du nouvel arc méridien de l'Équateur, on a mesuré deux fois un segment de la base fondamentale de Riobamba (règle bimétallique) et de la base de vérification de Payta (règle monométallique en invar).

Voici les résultats de ces diverses mesures :

Base de Paris (nouvelle méridienne de France) (1890).
(Appareil bimétallique.)

	Segment Nord.	Segment Sud.	Longueur totale.
	m	m	m
1re mesure...	3049,338532	4177,553176	7226,891708
2e mesure...	3049,336787	4177,564301	7226,901088
Δ.....	+ 0,001745	+ 0,011125	— 0,009380
$\frac{\Delta}{\text{Base}}$	$\frac{1}{1,745\,000}$	$\frac{1}{375\,000}$	$\frac{1}{770\,000}$

Base de Riobamba (arc méridien de Quito) (1901).
(Appareil bimétallique.)

	Segment Sud.
	m μ
1re mesure.....	3359,96516
2e mesure.....	3359,95852
Δ.....	+ 664
$\frac{\Delta}{\text{Segment}}$	$\frac{1}{506\,000}$

Base de Payta (arc méridien de Quito) (1906).
(Règle monométallique en invar.)

	Segment Est.
	m
1re mesure.....	3685,71945
2e mesure.....	3685,72106
Δ.....	161
$\frac{\Delta}{\text{Segment}}$	$\frac{1}{2\,290\,000}$

Voici en outre quelques résultats de bases mesurées avec l'appareil à fils invar :

Base de Laghouat (Méridienne de France prolongée en Algérie)
(fils invar) (1911).

		Moyenne.
	m	
1re mesure (aller).....	6625,649	646
2e » (retour).....	6625,643	
3e » (aller).....	6625,644	648
4e » (retour).....	6625,652	
Δ.....	2	
$\frac{\Delta}{B}$	$\frac{1}{3\,300\,000}$	

Base de Lyon (parallèle de Lyon) (fils invar) (1912).

		Moyenne.
	m	
1re mesure (aller)	8481,733	745
2e » (retour)	8481,756	
3e » (aller)	8481,739	749
4e » (retour)	8481,759	
Δ	4	
$\frac{\Delta}{B}$	$\frac{1}{2\,240\,000}$	

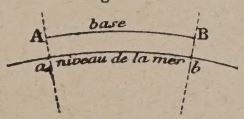
Base de Lyon (parallèle de Lyon) (règle monométallique invar) (1912).

		Moyenne.
	m	
1re mesure (aller)	8481,7494	7552
2e » (retour)	8481,7610	
Δ	116	
$\frac{\Delta}{B}$	$\frac{1}{1\,800\,000}$	

Réduction de la base au niveau de la mer.

Le terme $-2(l+v)\Sigma\sin^2\frac{1}{2}$ de la page 36 réduit la base à l'horizon de l'une des extrémités. Elle donne dès lors la longueur d'une ligne géodésique que l'on peut assimiler à un arc de cercle tracé sur la surface de niveau passant par ce dernier point. Il reste à la projeter sur la surface de niveau des mers, ce qui ramènera toute la triangulation à ce même niveau. Soient h l'altitude de la base AB, r le rayon terrestre; on aura

Fig. 123.



$$\frac{\text{arc } ab}{\text{arc AB}} = \frac{r}{r+h}, \qquad \text{d'où} \qquad \text{AB} - ab = \frac{h}{r}\,\text{AB}.$$

Pour $h = 400^{m}$, $\text{AB} = 12\,000^{m}$, $r = 6\,400\,000^{m}$, cette réduction serait de $0^{m},80$ (*fig.* 123).

L'altitude de la base est fournie, comme on le verra plus loin, par un nivellement géodésique poussé jusqu'à la mer la plus voisine.

Le terme correctif, faible dans la plupart des cas, peut cependant atteindre une valeur considérable quand la mesure de la base est faite à une grande altitude. La base de Riobamba, dans la mesure de l'arc méridien de l'Équateur, a 9^{km} de longueur et est à l'altitude de 3000^{m} environ. Le terme correctif atteint $4^{m},50$; il faut donc que l'altitude soit déterminée avec grand soin, au besoin, ainsi que cela a été fait pour la base en question, par un nivellement géométrique conduit jusqu'au niveau de la mer.

Jonction de la base avec le réseau.

Si la base était dirigée perpendiculairement à l'un des côtés, vers son milieu, les triangles de jonction formeraient un losange dont la base et le côté seraient les diagonales. Avec un côté de 10 lieues et une base b de 3, l'angle B au sommet sera de 33°, angle assurément défavorable, et comme l'erreur probable du côté conclu a, en tant qu'elle dépend de celle de cet angle, est

$$b\,\frac{d\frac{1}{2}\mathrm{B}}{\sin^{2}\frac{1}{2}\mathrm{B}},$$

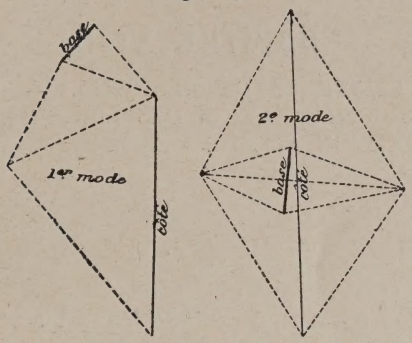
elle se réduira, en supposant $d\mathrm{B} = 1''$, à $\frac{1}{3}$ de mètre, tandis qu'avec une base de $\frac{1}{2}$ lieue elle serait de 2^{m}.

On voit par là combien il importe de donner à la base la plus grande étendue possible. De quelque manière que la jonction soit faite, il faut toujours conclure du petit au grand, et, à ce compte, en supposant même exactitude dans les opérations de la jonction, les bases de 2000^{m} mesurées en Allemagne et en Russie donneraient une précision six fois moindre.

Le plus souvent, la base ne peut être mesurée dans l'emplacement le plus commode. On la relie alors au côté voisin par une triangulation plus compliquée dont les figures ci-contre offrent deux modèles (*fig.* 124).

L'opération du rattachement est d'une très grande importance et il faut prêter une attention toute spéciale si l'on ne veut pas

Fig. 124.



y perdre toute la précision de la mesure de la base. Il vaut même mieux, s'il est nécessaire, mesurer une base dans un terrain difficile, quitte à perdre un peu de la haute précision de la mesure et avoir un bon rattachement, que de choisir pour la base un emplacement offrant toutes facilités, mais ne se prêtant qu'à un rattachement au réseau par des triangles mal conformés.

CHAPITRE XVIII.

CALCUL DES TRIANGLES GÉODÉSIQUES. — THÉORÈME DE LEGENDRE. — COMPENSATION DES ERREURS. — CALCUL DE LA LONGUEUR D'UN ARC DE MÉRIDIEN.

Réseau géodésique français.

Pour donner, à titre d'exemple, une idée de la vaste triangulation entreprise en vue de l'établissement de la Carte de France, à la suite des décisions de la Commission présidée par Laplace en 1817, triangulation qui couvre tout notre territoire et qui, bien que reprise dans un certain nombre de ses parties, tant dans le but de l'améliorer, qu'en raison de la disparition d'un grand nombre de signaux, reste toujours encore à la base des travaux géodésiques actuels, nous plaçons ici une carte de France à petite échelle, sur laquelle sont indiquées les chaînes primordiales de cette triangulation (*fig.* 125).

La Commission de 1817 a organisé tout l'ensemble des opérations suivant un plan rationnel de façon à limiter les accumulations d'erreurs et à procurer au cours des travaux successifs le plus grand nombre de vérifications possible.

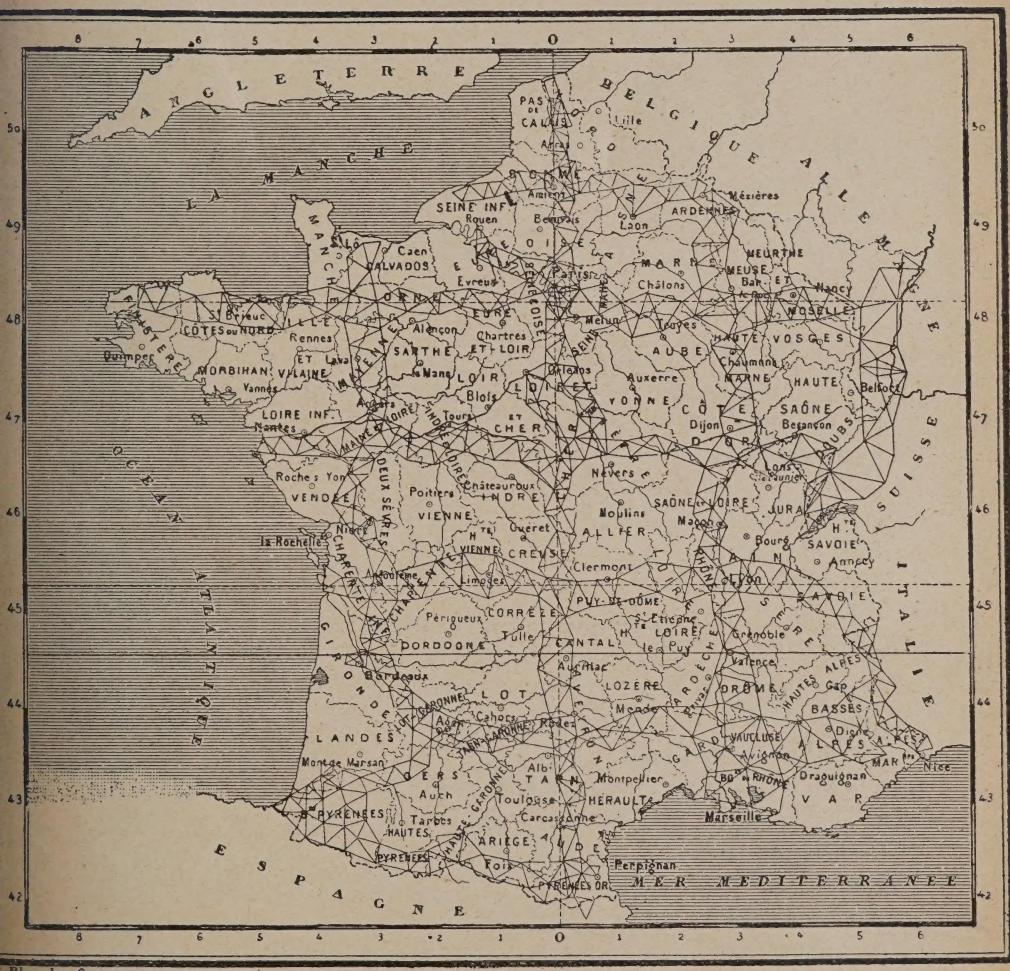
Dans ce but, le territoire de la France a été subdivisé en grands quadrilatères par trois chaînes méridiennes, celle de l'Ouest ou de Brest, celle de Paris et celle de l'Est ou de Sedan et six chaînes parallèles qui les coupent à angle droit suivant les parallèles d'Amiens, de Paris, de Bourges, de Lyon de Rodez et de Perpignan. Cette triangulation primordiale s'appuie sur sept bases : la base fondamentale de Melun, et six bases de vérification, celles de Perpignan, d'Ensisheim, de Brest, d'Aix-en-Provence, de Bordeaux et de Dax.

Les coordonnées astronomiques de départ, d'où dérivent par le

Fig. 125.

CARTE DU RÉSEAU GÉODÉSIQUE

DE LA FRANCE.



Blanadet. Sc.

On a supprimé sur ce plan les triangles de premier ordre qui remplissent les quadrilatères.

calcul toutes les longitudes et latitudes du réseau, sont celles de l'Observatoire auxquelles on a rattaché le Panthéon; l'azimut fondamental est celui du côté Panthéon Belle-Assise sur l'horizon du Panthéon.

Les intervalles compris dans l'intérieur des quadrilatères ont été comblés ensuite par une triangulation dite de premier ordre complémentaire, exécutée dans les mêmes conditions de précision que la triangulation fondamentale, et dont les côtés de triangles avaient comme les précédents 30 à 40^{km}. Puis, les mailles de ce réseau ont été remplies elles-mêmes par une triangulation dite de second ordre, à côtés moitié moindres, s'appuyant sur les sommets des triangles déjà établis et dont les opérations se vérifient constamment par fermeture sur les précédentes. Enfin, on a recoupé de ces stations de second ordre tous les signaux naturels remarquables, tels que les clochers, les maisons et les arbres isolés, les moulins à vents, etc. Ce sont ces points recoupés, dits de troisième ordre, qui forment la base véritable sur laquelle sont venus s'appuyer ultérieurement les travaux topographiques. On a mesuré également dans toutes ces opérations les distances zénithales destinées au calcul des différences de niveau, de telle sorte qu'en dernière analyse, et tous calculs faits, les points géodésiques de la carte de France (indiqués par un triangle sur la carte au $\frac{1}{80000}$) sont définis par leurs coordonnées et leur hauteur au-dessus du niveau de la mer. Le point de départ des altitudes est le niveau moyen de la mer à Marseille.

D'autre part, les triangulations primordiales dirigées suivant les méridiens ont également pour objet, comme on le sait, la détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre. A ce point de vue, la grande chaîne méridienne qui va de Dunkerque à Perpignan mérite une attention spéciale. Cette chaîne, dont les opérations exécutées à la fin du XVIII^{e} siècle par Delambre et Méchain ont servi de base à l'établissement du système métrique, a été prolongée ensuite de Barcelone aux îles Formentera, par Biot et Arago. Elle a été reprise entièrement par le Dépôt de la Guerre, devenu ensuite Service géographique de l'Armée, de 1870 à 1892. Les géodésiens espagnols l'ont prolongée sur leur territoire. En 1873, des opérations qui n'avaient jamais encore été réalisées avec une pareille ampleur, exécutées en commun par les géodésiens français et espagnols sous la direction

du commandant Perrier (1) et de M. Ibañez, ont relié, par-dessus la Méditerranée, par des triangles dont les côtés atteignaient 300^{km}, la chaîne franco-espagnole à nos triangulations d'Algérie, dont la chaîne méridienne primordiale va d'Alger à Laghouat. Comme la chaîne méridienne française a été reliée à la triangulation de la Grande-Bretagne par-dessus la Manche, et que cette dernière atteint au nord les iles Shetland, on dispose ainsi d'un arc de méridien de 27 degrés environ d'amplitude.

Calcul des triangles géodésiques.

Désignons désormais par a, b, c les longueurs en mètres ou en toises des côtés du triangle géodésique ABC. Les arcs correspondants seront, en parties du rayon r de la sphère, $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$. Le premier ayant été mesuré directement, nous calculerons le second par

$$\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Les arcs étant petits, il y aura avantage à remplacer les sinus par leurs développements en fonction des arcs, ce qui donne

$$\frac{b}{r} - \frac{1}{6}\frac{b^3}{r^3} + \ldots = \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^3} + \ldots\right)\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Négligeons les cinquièmes puissances des petits arcs et écrivons

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6}\left(\frac{b^3}{r^3} - \frac{a^3}{r^3}\frac{\sin B}{\sin A}\right).$$

Il est permis, avec la même approximation, de remplacer $\frac{b^3}{r^3}$ par sa valeur approchée $\frac{a^3}{r^3}\frac{\sin B}{\sin A}$, et d'écrire, en remarquant que

$$\sin^2 B - \sin^2 A = \sin(B+A)\sin(B-A),$$

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^3}\frac{\sin(B+A)\sin(B-A)\sin B}{\sin^3 A} \quad (2).$$

(1) Depuis général et directeur du Service géographique de l'Armée, décédé en 1888.

(2) On chasse le dénominateur r, en sorte que le calcul ne porte plus sur les arcs exprimés en minutes et secondes, mais sur leur longueur en mètres.

On peut donc calculer le triangle ABC comme s'il était plan, c'est-à-dire par la formule

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A},$$

à la condition d'ajouter à cette valeur un petit terme correctif dont la valeur ne saurait dépasser $0^m,25$. Pour l'évaluer, en effet, faisons $a = 40\,000^m$, $r = 6\,000\,000^m$; on aura

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{160}, \qquad \frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{25600} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^2} = \frac{1}{6}\frac{40000^m}{25600} = 0^m,26.$$

On aurait donc ainsi à ajouter un appoint à chaque côté calculé, mais un théorème important dû à Legendre donne une solution bien plus simple de la question.

Théorème de Legendre. — Legendre, en effet, a remarqué qu'on pourrait se passer du terme correctif si, au lieu de calculer ce triangle comme plan avec des angles évidemment un peu trop forts, on retranchait tout d'abord de ces angles le tiers de l'excès sphérique pour les ramener à la condition des angles d'un triangle plan. Soit $\mathcal{E}$ l'excès sphérique du triangle ABC qu'on obtiendra immédiatement par

$$\mathcal{E} = A + B + C - 180^\circ.$$

On aura, en opérant comme le prescrit Legendre,

$$b = a\,\frac{\sin\left(B - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right)}{\sin\left(A - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right)}.$$

Développons ces sinus et divisons haut et bas par $\cos\frac{1}{3}\mathcal{E}$:

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\,\frac{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\cot B}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\cot A}\,\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Pour effectuer cette division aux termes près du deuxième ordre en $\mathcal{E}$, il suffit de multiplier le numérateur par $1 + \operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\cot A$,

ce qui donne, en remarquant que

$$\cot A - \cot B = \frac{\sin(B - A)}{\sin B \sin A},$$

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{a}{r}\tang\frac{1}{3}\mathcal{E}\frac{\sin B}{\sin A}\frac{\sin(B - A)}{\sin B \sin A}.$$

Mais nous avons vu précédemment que l'excès sphérique $\mathcal{E}$ a pour valeur

$$\frac{T}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{\sin B \sin(B + A)}{\sin A}.$$

On peut donc remplacer plus haut $\tang\frac{1}{3}\mathcal{E}$ par

$$\frac{1}{6}\frac{a^2}{r^2}\frac{\sin B \sin(B + A)}{\sin A},$$

aux termes près du troisième ordre (1). La relation précédente devient

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^3}\frac{\sin B \sin(B + A)\sin(B - A)}{\sin^3 A},$$

c'est-à-dire justement ce que nous avons trouvé par le premier procédé. Donc, au lieu d'employer ce procédé, on a la même exactitude en traitant les triangles géodésiques comme des triangles plans, après avoir retranché de leurs angles le tiers de l'excès sphérique. Les termes que l'on néglige ainsi dans l'un et l'autre cas ont pour facteur $\frac{1}{120}\frac{a^5}{r^4}$, c'est-à-dire $\frac{1^m}{2\,000\,000}$, lorsque a est de $40\,000^m$.

Finalement, pour résoudre le triangle sphérique dont on connaît le côté a en mètres et les angles dièdres A, B, C, on calculera $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E} = A + B + C - 180^\circ,$$

puis on obtiendra b et c par les formules

$$b = a\frac{\sin B'}{\sin A'}, \qquad c = a\frac{\sin C'}{\sin A'},$$

---

(1) Comme dans cette substitution $\tang\frac{1}{3}\mathcal{E}$ est multiplié par $\frac{a}{r}$, le terme du second ordre en $\mathcal{E}^2$, que nous venons de négliger, aurait lui-même $\frac{a}{r}$ pour facteur; et comme $\mathcal{E}^2$ est de l'ordre $\frac{a^4}{r^4}$, l'erreur serait encore de l'ordre $\frac{a^5}{r^5}$.

dont les angles sont donnés par

$$A' = A - \frac{1}{3}\mathcal{E},$$

$$B' = B - \frac{1}{3}\mathcal{E},$$

$$C' = C - \frac{1}{3}\mathcal{E}.$$

On obtiendra ainsi $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$ aux termes près de l'ordre $\frac{a^5}{r^4}$.

On peut donner également une *démonstration directe du théorème de Legendre*, théorème que l'on énonce souvent ainsi :

Si, dans un triangle sphérique, on peut considérer les rapports $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ comme étant du premier ordre de petitesse, de telle façon que les quatrièmes puissances de ces rapports puissent être négligées dans les calculs, le triangle sphérique de côtés a, b, c a la même surface qu'un triangle plan de même longueur de côtés et les angles de ce triangle plan sont égaux à ceux du triangle sphérique, diminués chacun du tiers de l'excès sphérique.

Soit ABC le triangle sphérique considéré. On a, par les formules de Borda :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{r}\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{p}{r}\sin\frac{p-a}{r}}};$$

remplaçons les sinus par leur développement en série jusqu'au terme du quatrième ordre exclu, il vient :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{p-b}{r}\left[1-\frac{(p-b)^2}{6r^2}\right]\frac{p-c}{r}\left[1-\frac{(p-c)^2}{6r^2}\right]}{\frac{p}{r}\left[1-\frac{p^2}{6r^2}\right]\frac{p-a}{r}\left[1-\frac{(p-a)^2}{6r^2}\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\left[1+\frac{p^2}{6r^2}+\frac{(p-a)^2}{6r^2}-\frac{(p-b)^2}{6r^2}-\frac{(p-c)^2}{6r^2}\right]};$$

réduisant les termes dont le dénominateur est $6r^2$, on a :

$$\begin{aligned} p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2 &= -2pa+a^2+2pb-b^2+2pc-c^2 \\ &= (a+b+c)(b+c-a)+a^2-b^2-c^2 \\ &= 2bc. \end{aligned}$$

Or, dans un triangle plan dont les côtés sont a, b, c et les angles A′, B′, C′, on a la relation :

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}A';$$

donc

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \operatorname{tang}\frac{1}{2}A'\left[1+\frac{bc}{3r^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}A'\left(1+\frac{bc}{6r^2}\right),$$

en négligeant les termes du quatrième ordre. Cette relation est analogue à celle du développement de Lagrange (1er fascicule, page 74) :

$$\operatorname{tang} x = \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tang} y,$$

dans laquelle

$$\frac{1-m}{1+m} = 1+\frac{bc}{6r^2}, \qquad \text{d'où} \qquad m = -\frac{bc}{12r^2},$$

au quatrième ordre près.

Le développement de Lagrange nous donnera, avec la même approximation :

$$\frac{A}{2}-\frac{A'}{2} = \frac{bc}{12r^2}\sin A';$$

or, $\frac{1}{2}bc\sin A'$ est l'expression de la surface T′ du triangle plan A′B′C′; donc

$$A = A'+\frac{1}{3}\frac{T'}{r^2},$$

de même

$$B = B'+\frac{1}{3}\frac{T'}{r^2},$$

$$C = C'+\frac{1}{3}\frac{T'}{r^2},$$

d'où

$$A+B+C = A'+B'+C'+\frac{T'}{r^2}$$
$$= 200^G+\frac{T'}{r^2};$$

mais nous avons vu que l'on a aussi

$$A+B+C = 200^G+\frac{T}{r^2},$$

$\frac{T}{r^2}$ étant l'excès sphérique; donc, dans la limite d'approximation du théorème de Legendre,

$$\frac{T}{r^2} = \frac{T'}{r^2} = \mathcal{E},$$

et enfin

$$A' = A - \frac{1}{3}\mathcal{E},$$

$$B' = B - \frac{1}{3}\mathcal{E},$$

$$C' = C - \frac{1}{3}\mathcal{E},$$

ce qui démontre le théorème.

En géodésie, quand il s'agit d'opérations principales, on mesure toujours les trois angles des triangles. Si ces angles mesurés étaient rigoureusement exacts, la différence de leur somme à 200^G donnerait l'excès sphérique. Mais il y a des erreurs d'observation et la différence trouvée est la somme algébrique de ces erreurs et de l'excès sphérique. Or, nous savons que l'on corrige les angles d'un triangle des erreurs d'observation en retranchant de chaque angle le tiers de la somme algébrique de ces erreurs. On corrigera donc les angles mesurés, en même temps que l'on appliquera le théorème de Legendre, en retranchant de chacun des angles le tiers de la différence entre la somme des angles mesurés et 200^G.

Si l'on voulait connaître la valeur de la somme des erreurs d'observation, c'est-à-dire avoir une idée de la précision avec laquelle les observations ont été faites, on calculerait directement l'excès sphérique

$$\mathcal{E} = \frac{T'}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2 \frac{\sin A' \sin (A' + B')}{\sin B'},$$

en employant au lieu de A′ et B′ les valeurs des angles mesurés, ce qui est permis dans les limites de précision du théorème de Legendre.

On calcule ainsi de proche en proche, en partant de la base fondamentale, tous les triangles du réseau. Ainsi que nous l'avons dit, on mesure un certain nombre de bases de vérification, dont les valeurs calculées par les chaînes de triangles doivent s'accorder

à une petite fraction près du mètre avec les valeurs obtenues directement.

Compensation des réseaux géodésiques.

Si l'on ne mesurait sur le terrain que les éléments nécessaires au calcul d'une triangulation, il ne serait pas question de corriger ces éléments : on les introduirait dans les formules tels que l'observation nous les donne. Mais, à titre de vérification, on fait le plus souvent des observations superflues ; par exemple, on mesure le troisième angle de chaque triangle ; dans les figures plus compliquées, quadrilatère, pentagone, on mesure tous les angles que forment entre eux les côtés et les diagonales ; on mesure, comme nous l'avons vu, des bases de vérification. De là des relations nouvelles entre les éléments nécessaires et les éléments superflus qui doivent être rigoureusement satisfaites. On se trouve dans le cas des observations conditionnelles, que nous avons traité dans la théorie des erreurs d'observation. Les solutions portent le nom de *compensation* des figures ou des réseaux géodésiques. Nous avons pris déjà comme exemple, à propos des observations conditionnelles, la compensation des angles d'un triangle dans lequel on a mesuré les trois angles ; nous donnerons comme second exemple la compensation d'un quadrilatère.

Compensation d'un quadrilatère.

On a mesuré tous les angles possibles, soit huit. Il y a donc des observations surabondantes, puisque le quadrilatère peut être déterminé par deux triangles seulement. Les observations fournissent quatre triangles, pour chacun desquels il faudra écrire la relation qui lie les trois angles. Cela ne donne en réalité que trois relations distinctes, car la quatrième est une conséquence des trois autres, trois triangles seulement étant indépendants.

Les équations de condition de cette espèce portent le nom d'*équations aux angles*.

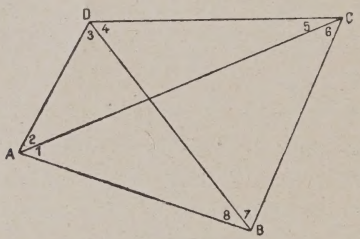
En outre de ces relations entre les angles, il faut encore exprimer que la valeur d'un côté quelconque, BD par exemple, sera la même quel que soit l'enchaînement que l'on suive pour le calculer. Cette

nouvelle équation de condition porte le nom d'*équation aux côtés.*

Chaque équation aux angles, en effet, exprime une relation qui serait commune à une infinité de triangles semblables; l'équation aux côtés fixe les dimensions de la figure et donne par conséquent aux côtés de chaque triangle les dimensions réelles qui leur conviennent.

Formation des équations de eondition. — Nous écrirons immédiatement les trois équations aux angles correspondant aux triangles ABC, ADB, ADC, en désignant par

Fig. 126.



(1), (2), (3), ... les corrections dont seront affectés les angles 1, 2, 3, ... de la figure 126, et par e_1, e_2, e_3 les erreurs de fermeture de chacun des triangles :

$$e_1 = (1) + (6) + (7) + (8),$$
$$e_2 = (1) + (2) + (3) + (8),$$
$$e_3 = (2) + (3) + (4) + (5).$$

L'équation aux côtés s'obtiendra en exprimant que la diagonale BD aura même longueur, soit qu'on la calcule directement par le triangle ADB, soit qu'on la calcule par le triangle DCB, en passant par le triangle ACB. On aura ainsi :

1° Par le triangle ADB,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin[1 + (1) + 2 + (2)]}{\sin[3 + (3)]};$$

2° Dans le triangle ACB,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin[6 + (6)]}{\sin[1 + (1)]};$$

3° Dans le triangle BCD,

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\sin[4+(4)]}{\sin[5+(5)+6+(6)]};$$

multipliant membre à membre, il viendra

$$\sin[3+(3)]\sin[1+(1)]\sin[5+(5)+6+(6)] = \sin[1+(1)+2+(2)]\sin[6+(6)]\sin[4+(4)].$$

Équation qui n'est pas linéaire, mais que l'on rendra telle en prenant les logarithmes des deux termes et en remarquant que, les corrections étant très faibles, on peut écrire pour un angle quelconque :

$$\log\sin[3+(3)] = \log\sin 3 + (3)\Delta,$$

Δ étant la différence tabulaire pour 1″, prise dans les tables de logarithmes, et la correction (3) étant exprimée en secondes.

L'équation aux côtés deviendra alors

$$\log\sin 3 + (3)\Delta + \log\sin 1 + (1)\Delta_1 + \ldots = \log\sin[1+2] + (1)\Delta_{1+2} + (2)\Delta_{1+2}.$$

Appelant D la quantité connue

$$\log\sin 3 + \ldots - \log\sin[1+2] - \ldots,$$

on obtiendra l'équation définitive

$$D = a(1) + b(2) + c(3) + d(4) + e(5) + f(6),$$

les coefficients a, b, c, ... étant des nombres connus.

Il faut rendre minimum la fonction

$$(1)^2 + (2)^2 + \ldots + (8)^2.$$

Appliquant la règle générale et écrivant les conditions de minimum absolu de la fonction

$$(1)^2 + \ldots + (8)^2 - 2\lambda_1[(1)+(6)+(7)+(8)] - \ldots - 2\lambda_4[a(1)+\ldots],$$

on formera les équations corrélatives :

$$\begin{aligned}
(1) &= \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_4,\\
(2) &= \lambda_2 + \lambda_3 + b\lambda_4,\\
(3) &= \lambda_2 + \lambda_3 + c\lambda_4,\\
(4) &= \lambda_3 \quad\quad + d\lambda_4,\\
(5) &= \lambda_3 \quad\quad + e\lambda_4,\\
(6) &= \lambda_1 \quad\quad + f\lambda_4,\\
(7) &= \lambda_1,\\
(8) &= \lambda_1 + \lambda_2.
\end{aligned}$$

En remplaçant ensuite les corrections (1), (2), ... par leurs valeurs en fonction de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 dans les équations de condition, on aura les équations normales ou équations en λ, d'où l'on tirera les valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4, qui, portées dans les huit équations corrélatives, donneront les valeurs des corrections.

Ces corrections une fois obtenues, on en déduira les angles corrigés et, comme vérification, on calculera les triangles afin de s'assurer que la valeur du côté BD est bien la même dans les deux enchaînements différents, et qu'ainsi aucune faute n'a été commise dans la pose ou la résolution des équations.

L'exemple du quadrilatère montre combien les calculs s'allongeraient et se compliqueraient dans une figure d'un plus grand nombre de côtés.

Si nous envisageons, au lieu d'un quadrilatère, un polygone quelconque, il importe de connaître *a priori* combien il doit y avoir d'équations aux angles et d'équations aux côtés. Ce nombre d'équations est donné par le théorème de Gauss :

Théorème de Gauss. — *Dans une figure où toutes les observations possibles d'angles et de directions ont été faites et qui comprend p points, dont deux sont donnés et l lignes, le nombre des équations aux angles est* $(l-p+1)$ *et le nombre des équations aux côtés* $(l-2p+3)$. *Le nombre total des équations de condition est par suite* $(2l-3p+4)$.

1° Supposons p points et relions-les par p lignes; nous formerons un polygone de p côtés déterminant ces p points. Ce polygone fournit une première relation entre les angles. Une nouvelle ligne joignant deux sommets quelconques non consécutifs de ce polygone le partage en deux autres polygones, chacun d'eux donnant lieu à une équation aux angles analogue à la première, mais dont une seule est indépendante; donc, chaque ligne en plus des p premières introduit une équation nouvelle aux angles; comme le nombre de ces lignes est $(l-p)$, il en résulte $(l-p)$ équations nouvelles auxquelles il faut ajouter la première, ce qui donne en tout $(l-p+1)$ équations aux angles.

2° Partons des deux premiers points pour en déterminer un troisième : il faut deux lignes; donc, pour définir les trois premiers points, il faut trois lignes; pour un point suivant, il suffit de deux

lignes nouvelles; le nombre des lignes nécessaires pour définir les p points du polygone sera donc $(p-3)2+3$, c'est-à-dire $(2p-3)$. Or, le nombre des lignes mesurées est l; il y aura donc $(l-2p+3)$ observations surabondantes qui fournissent autant d'équations aux côtés.

Appliquons ce théorème au quadrilatère, nous aurons dans ce cas :

$$p = 4,$$
$$l = 6,$$

d'où

$$6 - 4 + 1 = 3 \text{ équations aux angles}$$

et

$$6 - 8 + 3 = 1 \text{ équation aux côtés,}$$

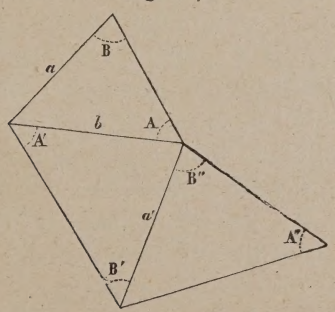
résultat que l'on a trouvé précédemment par des considérations directes.

Compensation d'un réseau de triangles.

S'il n'y avait pas d'autre mesure superflue dans le cours de la triangulation, on se contenterait de corriger ainsi les angles de chaque figure ou de chaque triangle pris à part. Mais si nous supposons une seconde base, il en résulte, entre les angles et les côtés, une relation analogue à une équation aux côtés.

Prenons le cas très simple d'une chaîne ne comportant que des triangles (*fig.* 127); la relation s'obtiendra en multipliant membre

Fig. 127.



à membre, d'un bout à l'autre de la chaîne, les analogies

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \qquad \frac{b}{a'} = \frac{\sin B'}{\sin A'}, \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{\sin A''}{\sin B''}, \qquad \ldots$$

Pour fixer les idées, supposons trois triangles intermédiaires seulement, et représentons par a et b' deux côtés mesurés directement, c'est-à-dire les deux bases que nous considérerons comme rigoureusement exactes. La relation nécessaire sera

$$\frac{a}{b'} = \frac{\sin A \sin B' \sin A''}{\sin B \sin A' \sin B''}.$$

Comme d'autre part on a mesuré les trois angles de chaque triangle, cette relation, jointe aux équations aux angles, relatives aux triangles, conduirait, pour les calculs, à une solution analogue au cas du quadrilatère que l'on vient de résoudre.

Les exemples simples que nous venons de donner tracent la marche à suivre dans des cas plus complexes.

Nous ferons ici une dernière remarque.

Les géodésiens s'attachent souvent à multiplier les moyens de vérification.

Ils s'imposent, comme nous l'avons vu, la règle d'observer dans certaines stations des directions superflues, et chaque observation superflue introduit une équation nouvelle entre les angles seulement, ou entre les angles et les côtés. Certainement, en multipliant ainsi ces équations de rigueur, on augmente la probabilité des corrections obtenues par les méthodes dont la Géodésie est principalement redevable à Gauss et à Bessel, mais le calcul se complique bien vite et devient bien long dès qu'on veut l'étendre à un réseau géodésique un peu grand. On en est réduit alors à décomposer le réseau en groupes séparés et à y opérer des compensations partielles d'après les règles précédentes; mais ce procédé laisse évidemment une place assez large à l'arbitraire, et ne répond pas à l'idéal de la théorie, qui serait de déterminer les corrections par l'ensemble de toutes les équations de condition.

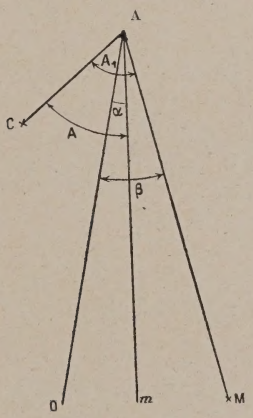
De l'avis de bien des géodésiens, il vaut mieux employer son temps et ses ressources à perfectionner sur le terrain les mesures nécessaires qu'à recueillir des mesures superflues dont on est ensuite incapable de tirer parti dans le cabinet, à moins de calculs très longs et très compliqués, qui n'ajoutent que bien peu de chose à la probabilité des corrections.

Observations astronomiques pour déterminer la direction et l'amplitude de la méridienne.

Ainsi qu'on l'a vu au Chapitre XVII, les opérations nécessaires pour la mesure d'un arc de méridien comportent, en outre de la mesure d'une base et de celle des angles des triangles, la détermination astronomique de la direction du méridien, c'est-à-dire de l'azimut du premier côté de la chaîne des triangles et celle des latitudes des extrémités de l'arc.

Nous avons exposé comment l'observation au cercle méridien d'étoiles circumpolaires et d'étoiles équatoriales permettait, par la formule de Mayer, de calculer l'azimut de l'axe optique de la lunette. On place donc en A (*fig.* 128) un cercle méridien portatif

Fig. 128.



dont l'axe optique de la lunette supposé horizontal aura la direction AO, peu différente de celle du méridien Am.

Les observations astronomiques donnent l'angle OA$m = \alpha$.

A quelques kilomètres de distance et près du point de passage du méridien de la station, on place en M une mire (miroir solaire ou collimateur optique) puis, à chaque série, on détermine à l'aide du fil mobile, l'angle que fait la direction AM avec la direction AO, MAO $= \beta$. On a ainsi l'angle mAM.

Remplaçant ensuite le cercle méridien par un théodolite ou un cercle azimutal, on mesure l'angle MAC $= A_1$, d'où l'on conclut

l'azimut cherché A, compté suivant les conventions usitées en géodésie, du Sud en allant vers l'Ouest.

Par suite, la direction ARST...XYZ de la méridienne à travers la chaîne des triangles se trouvera déterminée.

On déterminera également à l'aide du cercle méridien portatif, par la méthode de Villarceau, et avec la plus grande précision possible, la latitude λ de la station A, et enfin la latitude λ' de la dernière station de la chaîne, d'où l'on déduira, comme on le verra plus loin, la latitude astronomique de l'extrémité de l'arc.

Calcul de la longueur de l'arc de méridien.

Ce calcul peut se faire de différentes manières. Nous en examinerons deux : le calcul par segments et le calcul par projections.

Calcul de la méridienne par segments.

Dans le triangle sphérique ABR, on connaît le côté $AB = c$ et les angles dièdres A_1 et B (*fig.* 129). La formule

$$\mathcal{E} = 206265'' \frac{T}{r^2} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{E} = \frac{T}{r^2 \sin 1''},$$

pour laquelle T peut être calculé par la formule connue des triangles plans

$$T = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A_1 \sin B}{\sin(A_1 + B)},$$

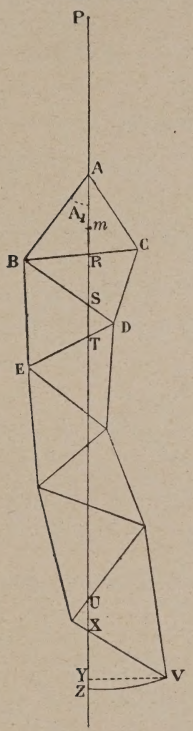
fera connaître l'excès sphérique de ce triangle. On ramènera donc la résolution de ce triangle sphérique à celle d'un triangle plan en retranchant $\frac{1}{3}\mathcal{E}$ de ses angles, et l'on aura

$$R - \frac{1}{3}\mathcal{E} = 180° - \left(A_1 - \frac{1}{3}\mathcal{E} + B - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right),$$

$$AR = c \frac{\sin\left(B - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right)}{\sin\left(R - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right)}, \qquad RB = c \frac{\sin\left(A_1 - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right)}{\sin\left(R - \frac{1}{3}\mathcal{E}\right)}.$$

Dans le triangle suivant BRS, on connaît BR et les angles en B et R, ce dernier étant le supplément de l'angle R obtenu précédemment. On en déduira donc le second segment RS. Le troi-

Fig. 129.



sième triangle SDT donnera le troisième segment ST. On arrivera ainsi au dernier segment UX.

Le point X n'étant pas déterminé sur le terrain, on ne saurait y observer la colatitude. C'est en V que λ' aura dû être mesuré. Soit VZ l'arc de parallèle passant par V et décrit (sur la sphère tangente le long du parallèle du sommet V) du pôle P comme centre. Il reste à calculer ce dernier tronçon XZ.

Pour cela, menons l'arc de grand cercle VY perpendiculairement à la méridienne. Le triangle XVY se calculera comme les précédents, et fera connaître en mètres les côtés XY et VY. Réduisons ce dernier en arc, en divisant sa valeur en mètres par le

rayon r de la Terre. Le long triangle sphérique PVY nous donnera

$$\frac{\sin P}{\sin VY} = \frac{1}{\sin PV} = \frac{1}{\sin \lambda'},$$

puis on aura

$$\operatorname{tang} PY = \cos P \operatorname{tang} PV,$$

d'où

$$PV - PY = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} P \sin 2\lambda' - \dots.$$

Cet arc transformé en mètres donne YZ.

Ainsi, l'arc de méridien compris entre les parallèles de λ et λ' de colatitude sera, en mètres,

$$AR + RS + ST + \dots + XY + YZ.$$

Enfin, si l'on mesure en V l'azimut du dernier côté VX, cet azimut devra s'accorder avec celui qu'on déduira de l'angle en X du triangle VXY, et servira ainsi de vérification.

Aujourd'hui on n'emploie plus guère cette méthode; elle est longue et a surtout l'inconvénient de ne pas se prêter facilement à des calculs de vérification. On lui en préfère actuellement d'autres dont nous exposons l'une des plus usuelles.

Calcul de la méridienne par projections.

On projette sur le méridien de la station de départ où l'on a déterminé l'azimut et la latitude, les sommets de deux (ou plusieurs) enchaînements linéaires, pris dans la chaîne et reliant chacun le premier sommet au dernier. On obtient ainsi deux valeurs (au moins) de l'arc calculé, donc une vérification du calcul.

Les projections se font sur la série successive des sphères de rayon $\sqrt{RN}$, par des arcs de grands cercles perpendiculaires à la méridienne (*fig.* 130)

La somme des divers segments projetés AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., à laquelle il faudra ajouter le petit élément terminal YZ, calculé comme il a été dit plus haut, donnera la longueur cherchée.

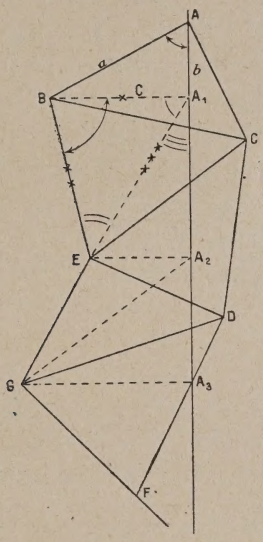
Pour le calcul de $AA_1 = b$, on connaît dans le triangle rectangle ABA_1 l'angle en A qui est l'azimut mesuré et le côté $AB = a$.

Pour avoir le troisième angle, on calculera tout d'abord l'excès

sphérique du triangle ABA_1 par la formule $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{ab\sin Z}{r^2 \sin 1''}$, où l'on prend $b = a\sin Z$, d'où $\varepsilon = \frac{1}{4}\frac{a^2 \sin 2Z}{r^2 \sin 1''}$.

On en déduit l'angle en B, puisque $\pi + B + Z = 2\pi + \varepsilon$, et la résolution du triangle donnera AA_1 et BA_1.

Fig. 130.



Pour calculer ensuite le segment A_1A_2, on calcule d'abord le côté A_1E, dans le triangle BA_1E, où l'on connaît $A_1B = c$, l'angle en B et le côté BE. L'excès sphérique est donné par

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{BE \times A_1B \sin B}{r^2 \sin 1''}.$$

Le calcul du triangle plan BA_1E, où l'angle en $B = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, donnera les angles plans A'_1 et E', d'où l'on déduira les angles sphériques A_1 et E en ajoutant à chacun d'eux $\frac{1}{3}\varepsilon$. Enfin, le triangle A_1EA_2 rectangle en A_2, où l'on connaît le côté A_1E et l'angle en A_1, donnera, après le calcul de l'excès sphérique, le segment A_1A_2.

On continuera ainsi de proche en proche jusqu'à l'extrémité de l'enchaînement, et l'on ajoutera à la somme des segments le petit appoint YZ, calculé comme il a été dit.

Chaque enchaînement différent fournit une vérification du calcul de la longueur de l'arc.

On partage d'habitude l'arc méridien en un certain nombre d'éléments, d'un degré environ chacun, par des stations astronomiques faisant partie de l'enchaînement, et où l'on a déterminé directement la latitude. On peut ainsi comparer entre eux ces divers éléments dont on connaît l'amplitude astronomique et vérifier si la courbure de l'arc est régulière, et à très peu près celle d'un arc d'ellipse, comme on l'a supposé.

La détermination de la longueur de chacun de ces éléments d'arc donnera lieu au calcul d'un petit appoint analogue à YZ.

CHAPITRE XIX.

SUR LA COURBURE DES SURFACES CONVEXES.

Nous avons montré sommairement au Chapitre XVII qu'en raison de ce que la surface du géoïde s'écartait peu de celle d'une sphère, on pouvait considérer les triangles géodésiques qui, en réalité, sont des triangles sphéroïdiques, comme étant des triangles sphériques tracés sur certaines sphères, et ramener ainsi les calculs aux formules ordinaires de la trigonométrie sphérique.

Nous allons, dans ce Chapitre, justifier plus complètement les considérations qui nous ont conduit à ces résultats. Pour cela, nous exposerons aussi simplement que possible quelques notions indispensables sur la courbure des surfaces convexes et sur les lignes qu'on y peut tracer d'après une définition géométrique; telle est la ligne ARST... de la figure 129.

Indicatrice; rayons de courbure principaux.

Supposons qu'une surface rapportée à trois axes rectangulaires soit représentée par l'équation $z = f(x, y)$, et qu'on puisse appliquer la série de Maclaurin au développement de cette équation : on aura, en désignant par l'indice zéro les valeurs que prennent les coefficients du développement général quand on y fait $x = 0$, $y = 0$,

$$z = f(x, y)_0 + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2}$$
$$+ \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_2 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{2.3} + \ldots.$$

Si la surface passe par l'origine, tangentiellement au plan des xy, et qu'on choisisse la direction de l'axe des x de manière

à faire disparaître le terme en xy, l'équation se réduira à

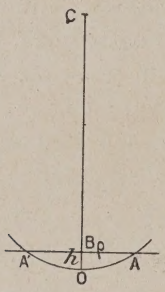
$$z = \left(\frac{d^2 f}{dx}\right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots.$$

Coupons la surface par un plan parallèle à celui des xy et situé à la hauteur h (infiniment petit du deuxième ordre); la section aura pour équation, en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$2h = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)_0 y^2.$$

Ce sera donc une ellipse si la surface est convexe, car alors les coefficients de x^2 et de y^2 seront positifs. Cette ellipse, infiniment petite, a reçu de Ch. Dupin le nom d'*indicatrice;* l'étude de ses caractères géométriques indique et détermine ceux de la surface elle-même autour du point considéré.

Fig. 131.



Menons par l'axe des z, c'est-à-dire par la normale à la surface en O, un plan quelconque qui coupe la surface suivant la courbe A′OA et le plan de l'indicatrice suivant le diamètre $A'A = 2\rho$. Soit $OC = 2r$ le diamètre du cercle osculateur en O, c'est-à-dire du cercle qui passe par les trois points infiniment voisins A′, O, A. Il est évident que

$$\overline{BA}^2 = (2r - h)h,$$

ou, en négligeant h^2, qui est du quatrième ordre de petitesse,

$$\rho^2 = 2rh.$$

Ainsi le rayon de courbure d'une section normale quelconque est

représenté par le carré du rayon correspondant de l'indicatrice. Désignons par a et b les deux axes de celle-ci, en sorte qu'on ait

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Les deux sections normales passant par les axes, et ayant pour rayons de courbure R et R′, donneront lieu aux relations

$$(1) \qquad b^2 = 2R'h, \qquad a^2 = 2Rh,$$

et l'on voit immédiatement qu'à ces deux sections, dont les plans sont rectangulaires, répondent les rayons de courbure maximum et minimum.

Si, pour orienter toute autre section normale, nous désignons par φ l'angle que sa trace fait avec le demi-axe b, nous aurons

$$x = \rho \sin\varphi, \qquad y = \rho \cos\varphi;$$

par suite,

$$\frac{\rho^2}{b^2}\cos^2\varphi + \frac{\rho^2}{a^2}\sin^2\varphi = 1$$

ou bien

$$\frac{1}{R'}\cos^2\varphi + \frac{1}{R}\sin^2\varphi = \frac{1}{r},$$

relation qui donne le rayon de courbure r d'une section normale dans un azimut φ quand on connaît les rayons de courbure principaux R et R′. C'est la relation d'Euler.

Courbure moyenne.

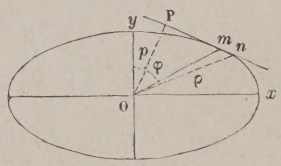
De même qu'on se représente la courbure d'une ligne en considérant le triangle infiniment aplati A′OA formé par deux éléments consécutifs OA, OA′, la corde $AA' = 2\rho$ et la flèche $OB = h$, de même on peut se représenter la courbure d'une surface autour du point O en considérant le cône infiniment aplati que forment les éléments rectilignes, tels que OA, OA′, de toutes les sections qui passent par la normale en O. C'est un cône droit ayant pour base l'indicatrice; ses plans principaux répondent aux axes de cette courbe.

Nous avons à examiner jusqu'à quel point il est permis de sub-

stituer un élément de sphère à un élément de sphéroïde terrestre. Pour cela, considérons d'une manière générale à quelle condition doit satisfaire une surface supposée flexible, mais inextensible, pour s'appliquer sur une autre, et quelles sont les lignes tracées sur la première surface qui ne changent pas de caractère en s'appliquant sur la seconde. Il est évident qu'un cône ne peut s'appliquer ainsi exactement sur un autre cône que si les angles au sommet de leurs développements sont égaux, c'est-à-dire si la déchirure qu'ils subissent en s'appliquant sur un plan est la même. Nous allons montrer que cet angle de déchirure, pour un élément quelconque de surface, est inversement proportionnel à l'aire de l'indicatrice.

L'aire du triangle élémentaire Omn est $\frac{1}{2}\rho^2\,d\varphi$. C'est la projection, sur le plan de l'indicatrice, de l'aire d'un triangle élémentaire du cône $\frac{1}{2}\rho'^2\,d\varphi'$. Désignons par p la perpendiculaire abaissée

Fig. 132.



du centre sur la tangente Pmn, par i l'angle de la génératrice ρ' du cône projetée en O$m = \rho$ fait avec le plan de la base, par i' l'inclinaison analogue de la droite qui joint le sommet du cône au point P; l'angle i' sera l'inclinaison de l'élément plan du cône. Par conséquent,

$$\rho' = \frac{\rho}{\cos i} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\rho^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{\cos^2 i}\cos i'\,d\varphi';$$

en d'autres termes,

$$d\varphi' = d\varphi\,\frac{\cos^2 i}{\cos i'}.$$

Mais on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{h}{\rho}, \qquad \operatorname{tang} i' = \frac{h}{p};$$

l'équation différentielle précédente devient donc, en considérant

que i et i' sont des angles infiniment petits,

$$d\varphi' = d\varphi \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{\rho^2} + \dots\right)^2}{1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{p^2} + \dots},$$

ou bien, en négligeant les termes $\frac{h^4}{\rho^4}$ ou $\frac{h^4}{p^4}$,

$$d\varphi' = d\varphi \left[1 - \left(\frac{h^2}{\rho^2} - \frac{h^2}{2p^2}\right)\right].$$

Nous verrons un peu plus loin (p. 79 et 80) que

$$a^2 b^2 \frac{1}{\rho^2} = b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi,$$

$$a^2 b^2 \frac{1}{p^2} = \frac{b^4 \sin^2\varphi + a^4 \cos^2\varphi}{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation différentielle précédente et intégrons de zéro à 2π, nous aurons

$$\text{somme des angles au sommet} = 2\pi - \frac{\pi h^2}{a^2 b^2}[a^2 + b^2 - (a^2 - ab + b^2)].$$

La déchirure du cône infiniment aplati a donc pour valeur $\frac{\pi h^2}{ab}$. Ainsi, pour qu'un élément de surface s'applique exactement sur un autre, il faut que leurs indicatrices, de même flèche, aient même aire.

Si donc on déforme, dans ces conditions, d'une manière quelconque une surface flexible, chaque élément de la nouvelle surface sera applicable sur l'élément correspondant de la première; par conséquent, l'aire de chaque indicatrice reste invariable dans ce changement de forme.

L'aire πab est, en vertu des relations (1), p. 69, proportionnelle à $\sqrt{RR'}$. Par suite, le produit des rayons de courbure principaux reste invariable quand on déforme une surface pour l'appliquer sur une autre sans déchirure ni duplicature. Si cette autre est une sphère, il faut donc que son rayon soit égal à $\sqrt{RR'}$.

Dans ce développement d'une surface sur une autre, il est évident que les courbes tracées sur la première changent de figure; mais ni leurs longueurs, ni les angles qu'elles forment, ni les sur-

faces qu'elles comprennent ne sont altérés. Une courbe jouissant de la propriété d'être la plus courte entre deux de ses points reste la ligne la plus courte sur l'autre surface. Supposons qu'on ait, sur le sphéroïde terrestre, un très petit triangle curviligne dont les côtés jouiraient de cette propriété ; si R et R′ sont les rayons principaux de la surface en cette région, on pourra l'appliquer sur une sphère de rayon $\sqrt{RR'}$; les côtés deviendront sur la sphère des arcs de cercle, car ce sont là les lignes les plus courtes qu'on puisse y tracer ; les angles du triangle sphérique seront égaux à ceux du triangle sphéroïdal ; les surfaces de ces deux triangles seront les mêmes.

La moyenne de tous les ρ^2 de l'indicatrice peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\varphi.$$

Cette moyenne est ab ou $\sqrt{RR'}$; il en sera de même de la moyenne de tous les rayons de courbure de la surface, puisque ceux-ci sont proportionnels aux ρ^2. $\sqrt{RR'}$ représente donc, en ce sens, le rayon de courbure moyen d'une surface en un point où R et R′ sont les rayons de courbure principaux.

Lignes de courbure.

Ainsi, en chaque point d'une surface, on rencontre deux sections normales se croisant à angles droits et ayant, l'une le plus grand, l'autre le plus petit rayon de courbure. La continuité exige qu'en passant d'un élément à l'autre, dans un sens quelconque, la courbure varie par degrés insensibles. On comprend donc qu'on puisse tracer sur une surface une ligne continue qui serait en chaque point tangente à la section principale de courbure maximum en ce point, et que si l'on construisait une seconde ligne tangente partout aux sections principales de courbure minimum, cette seconde ligne couperait la première à angle droit. Il y a ainsi sur chaque surface une infinité de lignes de courbure de première espèce, croisant à angle droit une infinité de lignes de courbure de deuxième. Elles sont telles qu'aux points consécutifs de chacune de ces courbes les normales à la surface se rencontrent deux à

deux, et forment ainsi une surface développable. Si l'on se reporte à l'élément conique déjà considéré, il est facile de voir que les plans diamétraux n'y sont pas normaux en général à la surface du cône; seuls les deux plans principaux jouissent de cette propriété; par conséquent, les seules normales infiniment voisines qui rencontrent l'axe sont celles qui se trouvent dans les plans principaux.

Les lignes de courbure ainsi définies s'obtiennent immédiatement sur les surfaces de révolution. Ce sont les méridiens et les parallèles de la surface. On voit, en effet, que les éléments superficiels situés sur un même parallèle ont les axes de leurs indicatrices tangents à ce cercle dont le centre est sur l'axe de révolution et que les normales menées en différents points de ce parallèle se rencontrent bien deux à deux, puisqu'elles se rencontrent toutes et forment un cône de révolution autour de l'axe; les parallèles sont donc bien les lignes de première courbure. Par conséquent aussi, les lignes de la seconde courbure, lesquelles doivent croiser les premières à angle droit, ne peuvent être que des méridiens; les unes et les autres sont des courbes planes. La surface de la Terre, pouvant, ainsi que nous le verrons plus loin, être assimilée très sensiblement à un ellipsoïde de révolution, on décrira à sa surface une ligne de courbure en marchant, soit sur un même parallèle, soit sur un même méridien. Dans le premier cas, la colatitude λ reste la même; dans le second cas, la longitude L est constante.

Lignes géodésiques.

Supposons qu'on marche sur le globe terrestre par la méthode des alignements, comme nous l'avons fait tacitement pour tracer la ligne ARS . . . X de la figure 129 à travers nos triangles géodésiques. Cela revient à tracer sur le sol un premier élément AR dans une direction donnée. Arrivé en R, on détermine l'élément suivant RS par la condition que RS soit dans le plan déterminé par l'élément AR et la verticale en R. Arrivé en S, on détermine l'élément suivant ST, de manière qu'il se trouve dans le plan vertical mené en S dans la direction SR, et ainsi de suite. La ligne ARS . . . ainsi tracée jouit évidemment de la propriété d'avoir deux éléments consécutifs dans un même plan vertical, c'est-à-dire normal à la surface de la Terre; par conséquent, les plans oscu-

lateurs en chacun de ses points sont normaux à la surface. La courbe ainsi définie porte le nom de ligne géodésique, et il résulte de sa propriété fondamentale qu'elle est la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface entre deux quelconques de ses points. En effet, si vous faites rouler tangentiellement un plan sur la surface le long de la courbe ARS . . ., l'enveloppe de ses positions successives sera une surface développable dont les génératrices feront des angles égaux avec les deux éléments consécutifs de la courbe. Si l'on développe cette surface sur un plan, la transformée de la courbe directrice sera une ligne droite. Elle sera donc plus courte que toute courbe voisine dans la zone de contact des deux surfaces.

On obtiendra mécaniquement la courbe qui unit deux points quelconques en tendant un fil sur la surface entre ces deux points.

Si l'on se reporte au cône infiniment plat du second degré qui représente un élément superficiel autour d'un point quelconque, on verra que les courbes géodésiques qui passent par ce point répondent aux arêtes opposées de ce cône, celles qui se trouvent dans ses plans diamétraux (1). Il est évident que les normales à la surface, menées par les points successifs d'une pareille courbe, ne se rencontrent généralement pas deux à deux, comme cela a lieu pour les lignes de courbure. Ainsi, dans la figure 132, la normale à la surface, à l'extrémité de l'élément projeté en Om, ne rencontre pas la normale en O ; elle en dévie d'un petit angle facile à déterminer.

Cependant, si la surface est de révolution, une ligne géodésique ou d'alignement dont le premier élément serait aligné dans le sens du méridien (c'est justement le cas de la figure 129), se confondra avec la ligne de courbure de même direction, c'est-à-dire avec le méridien lui-même. C'est pourquoi le procédé d'alignement des segments AR, RS, ST, . . ., qui a été employé plus haut pour tracer un méridien sur une sphère, à travers une série de triangles, est encore applicable à l'ellipsoïde de révolution. Cela nous donne même le moyen de soumettre l'hypothèse de cette

(1) Les plans tangents le long de ces arêtes coupent le plan de l'indicatrice suivant les deux tangentes parallèles au diamètre conjugué de celui sur lequel se prolongent les deux éléments. Par conséquent, leur intersection, parallèle à ces tangentes, rencontrera les deux éléments de la courbe géodésique sous les mêmes angles, ainsi qu'on vient de le dire.

dernière forme à un contrôle délicat. En effet, si la Terre est réellement une surface de révolution, en déterminant par l'observation l'azimut du dernier élément en X, on devra trouver zéro. Dans le cas où l'azimut observé différerait notablement dans la direction du méridien, il faudrait en conclure que, dans cette région, la surface mathématique de la Terre n'est pas de révolution.

Les côtés a, b, c d'un triangle géodésique ABC, n'ayant guère plus de 20′ d'amplitude, peuvent être considérés comme des arcs de courbes géodésiques tracées entre les trois sommets. Donc, ainsi que nous l'avons vu précédemment, quand on remplace en cette région la surface de l'ellipsoïde terrestre par la sphère de même courbure moyenne, ces lignes géodésiques restent géodésiques sur cette sphère, et y deviennent par conséquent des arcs de cercle de même longueur se coupant sous les mêmes angles. Nous n'avons donc rien à changer à nos opérations sur le terrain ; elles sont censées faites sur la sphère localement équivalente, et le triangle ABC répond à un véritable trièdre ayant son sommet au centre de cette sphère.

Équations des lignes géodésiques tracées sur une surface de révolution.

Considérons une surface de révolution rapportée à trois axes rectangulaires, l'axe de révolution étant l'axe des z (*fig.* 133).

Soient P le point où l'axe perce la surface, MN une ligne géodésique. La normale principale au point N a pour équations

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{Y-y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z-z}{\frac{d^2z}{ds^2}},$$

ds étant l'élément NN′ de la courbe. Puisque le plan osculateur est normal à la surface, la normale principale coïncide avec la normale à cette dernière et rencontre l'axe. Donc,

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

et en intégrant

$$x\,dy - y\,dx = C\,ds.$$

Soient α l'azimut de l'élément NN′ compté à partir du méridien sud, r le rayon du parallèle NN_1 passant par N, Q le centre de ce parallèle, $d\varphi$ l'angle NQN_1, on a

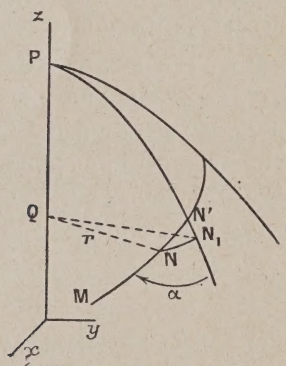
$$r^2\, d\varphi = C\, ds$$
$$r\, d\varphi = ds \sin\alpha,$$

d'où

$$r \sin\alpha = C. \tag{1}$$

Le produit du rayon du parallèle par le sinus de l'azimut est

Fig. 133.



constant sur tout le parcours d'une ligne géodésique tracée sur une surface de révolution. C'est le théorème de Clairaut. Appelons $d\sigma$ l'arc de méridien N_1N', nous aurons

$$d\sigma = ds \cos\alpha, \tag{2}$$

d'où, en éliminant α entre les équations (1) et (2),

$$ds = \frac{r\, d\sigma}{\sqrt{r^2 - C^2}} \tag{3}$$

et, par suite,

$$d\varphi = \frac{C\, d\sigma}{r\sqrt{r^2 - C^2}}, \tag{4}$$

relations dont nous aurons à nous servir ultérieurement.

CHAPITRE XX.

FORMULES ET DONNÉES NUMÉRIQUES APPLICABLES A L'ELLIPSOÏDE TERRESTRE.

Rayons de courbure principaux. Grande normale.

Le géoïde, nous l'avons dit, s'écarte peu de la figure théorique d'équilibre, c'est-à-dire de l'ellipsoïde de révolution. Avant d'exposer comment on en calcule les dimensions connaissant les longueurs et les amplitudes d'un certain nombre d'arcs du méridien, nous allons rappeler brièvement les équations et les formules caractéristiques de cette surface.

Soient a et b les demi-axes de l'ellipse génératrice, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ l'excentricité. L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes étant

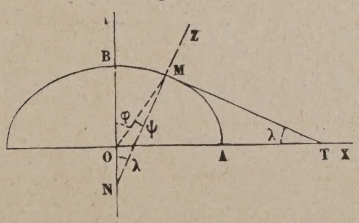
$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

nous la mettrons dans la forme suivante :

$$y^2 + (1 - e^2) x^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Soit, sur l'ellipse génératrice, un point M de l'ellipsoïde. En ce

Fig. 134.



point, les deux sections normales principales, dirigées suivant les axes de l'indicatrice, sont d'une part l'ellipse méridienne, et d'autre

part la section déterminée par le plan passant par la normale principale et la tangente en M au parallèle. Le rayon de courbure de l'ellipse méridienne en M est le rayon du cercle osculateur en ce point. Le rayon de courbure de la seconde section normale sera MN, portion de la normale comprise entre le point M et l'axe RN. En effet, considérons le parallèle et la section normale; les deux courbes ont même tangente en M. Il s'ensuit, d'après le théorème de Meusnier (1), que le centre de courbure du parallèle, qui est évidemment sur l'axe, est la projection du centre de courbure de la section normale, lequel doit donc être en N.

On donne à cette portion MN de la normale le nom de *grande normale*.

Soit λ la colatitude en M, c'est-à-dire l'angle de la verticale MZ et de l'axe de rotation OB. C'est la coordonnée courante pour un observateur placé à la surface du globe.

MZ est normale en M à la surface de l'ellipsoïde terrestre, et par conséquent, à l'ellipse génératrice BMA. On aura donc

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}\lambda = -\frac{dy}{dx} = (1-e^2)\frac{x}{y}.$$

Si nous désignons la *grande normale* MN par N, ce qui donne

$$\text{(2)} \qquad x = \mathrm{N}\sin\lambda,$$

nous aurons, en vertu de l'expression de $\operatorname{tang}\lambda$,

$$y = \mathrm{N}(1-e^2)\cos\lambda.$$

En portant ces deux valeurs de x et de y dans l'équation de l'ellipse, il viendra

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{N} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cos^2\lambda}}.$$

Différentions cette dernière équation, on trouve

$$\frac{d\mathrm{N}}{d\lambda} = -\frac{\mathrm{N}^3}{a^2}e^2\cos\lambda\sin\lambda.$$

---

(1) *Théorème de Meusnier.* — Le centre de courbure C d'une section oblique d'une surface est la projection sur le plan de cette section du centre de courbure C_1 de la section normale qui a même tangente.

La relation (2) donne

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)\cos\lambda.$$

En combinant cette dernière avec (1), il vient

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)\sin\lambda.$$

Par suite, si R représente le rayon de courbure en M, on aura

$$(4) \qquad R = \frac{ds}{d\lambda} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\lambda} = \frac{N^3(1 - e^2)}{a^2} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le rapport des deux rayons de courbure N et R est donc

$$\frac{N}{R} = \frac{1 - e^2\cos^2\lambda}{1 - e^2} > 1.$$

La grande normale est le rayon de courbure maximum, et la sphère ayant son centre en N et MN comme rayon est extérieure à l'ellipsoïde.

Comme l'angle MOB $= \varphi$ nous a servi dans la théorie des surfaces et qu'il joue un rôle en Astronomie sous le nom de *colatitude géocentrique*, nous l'introduirons ici en désignant par ρ le rayon OM de l'ellipse. Les relations

$$x = \rho\sin\varphi = N\sin\lambda,$$
$$y = \rho\cos\varphi = N(1 - e^2)\cos\lambda = N\frac{b^2}{a^2}\cos\lambda$$

donnent, quand on porte les premières valeurs de x et de y dans l'équation de la courbe,

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

On en tire encore

$$N^2 = (a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi)\frac{\rho^2}{b^4}.$$

En désignant par ψ l'angle $\varphi - \lambda$, on aura, dans le triangle NOM,

$$\rho\cos\psi = N - ON\cos\lambda,$$
$$\rho\sin\psi = \quad ON\sin\lambda,$$

expressions où $ON = N\cos\lambda - y = Ne^2\cos\lambda$.

Par conséquent, $\rho\cos\psi$, qui est égal à la perpendiculaire p menée du centre sur la tangente en M, peut s'écrire

$$p = \mathrm{N} - \mathrm{ON}\cos\lambda = \mathrm{N}(1 - e^2\cos^2\lambda) = \frac{a^2}{\mathrm{N}}$$

ou, en fonction de l'angle φ,

$$p^2 = a^2 b^2 \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}.$$

Les précédentes relations donnent encore

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{e^2\cos\lambda\sin\lambda}{1 - e^2\cos^2\lambda} = \frac{\frac{1}{2}e^2\sin 2\lambda}{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2\cos 2\lambda},$$

par suite,

$$\psi = \frac{e^2}{2 - e^2}\sin 2\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right)^2 \sin 4\lambda + \ldots.$$

Rectification d'un arc d'ellipse.

Pour achever de réunir les formules qui nous seront nécessaires dans la suite, nous allons exprimer la longueur d'un arc s d'ellipse en fonction des colatitudes λ et λ' de ses extrémités. L'équation différentielle est $ds = \mathrm{R}\,d\lambda$, dans laquelle

$$\mathrm{R} = a(1 - e^2)(1 - e^2\cos^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}.$$

Développons cette expression en série par la règle du binome de Newton :

$$\mathrm{R} = a(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\cos^2\lambda + \frac{15}{8}e^4\cos^4\lambda + \frac{105}{48}e^6\cos^6\lambda + \ldots\right).$$

Remplaçons les puissances de $\cos\lambda$ par leurs expressions en fonction des cosinus des multiples de l'argument (1), et posons,

---

(1) Au moyen de la formule connue

$$\cos^m\lambda = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos m\lambda + m\cos(m-2)\lambda + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\lambda + \ldots + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}\right],$$

pour abréger (1),

$$M = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2 + \frac{15}{8}\cdot\frac{3}{8}e^4 + \frac{105}{48}\cdot\frac{10}{32}e^6 + \ldots,$$

$$N = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2 + \frac{15}{8}\cdot\frac{4}{8}e^4 + \frac{105}{48}\cdot\frac{15}{32}e^6 + \ldots,$$

$$P = \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{8}e^4 + \frac{105}{48}\cdot\frac{6}{32}e^6 - \ldots,$$

$$Q = \frac{105}{48}\cdot\frac{1}{32}e^6 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il viendra

$$R = a(1-e^2)(M + N\cos 2\lambda + P\cos 4\lambda + Q\cos 6\lambda + \ldots).$$

Il suffit dès lors de multiplier par $d\lambda$ et d'intégrer entre les limites λ et λ' :

$$s = a(1-e^2)\left[M(\lambda'-\lambda) + \frac{1}{2}N(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \frac{1}{4}P(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + \frac{1}{6}Q(\sin 6\lambda' - \sin 6\lambda) + \ldots\right].$$

On met ordinairement cette série sous une forme un peu plus simple en posant $\lambda' - \lambda = \alpha$, $\lambda' + \lambda = 2\lambda_1$:

$$(5)\quad s = a(1-e^2)\left(M\alpha + N\cos 2\lambda_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}P\cos 4\lambda_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{3}Q\cos 6\lambda_1 \sin 3\alpha + \ldots\right).$$

---

qui nous donne

$$\cos^2\lambda = \frac{1}{2}\cos 2\lambda + \frac{1}{2},$$

$$\cos^4\lambda = \frac{1}{8}\cos 4\lambda + \frac{4}{8}\cos 2\lambda + \frac{3}{8},$$

$$\cos^6\lambda = \frac{1}{32}\cos 6\lambda + \frac{6}{32}\cos 4\lambda + \frac{15}{32}\cos 2\lambda + \frac{10}{32}.$$

(1) Il est bon de faire remarquer ici, comme moyen de vérification, qu'on doit avoir

$$M - N + P - Q + \ldots = 1.$$

En effet, à l'équateur, où $\lambda = 90°$, R se réduit à $a(1-e^2)$ en vertu de la formule (4); il en doit être de même de son expression en série, qui devient alors

$$R = a(1-e^2)(M - N + P - Q + \ldots).$$

Éléments de l'ellipsoïde terrestre.

Pour juger de la courbure de notre globe, nous anticiperons sur les résultats auxquels nous parviendrons plus loin, en donnant ici un tableau de quelques-unes des valeurs de a et de e^2 qui ont été successivement adoptées. Chaque série des deux valeurs provient de déterminations des éléments de l'ellipsoïde correspondant à un groupement de certains arcs de méridien traités dans leur ensemble.

Ellipsoïde des Ingénieurs géographes,
employé dans le calcul de la triangulation de la carte d'État-Major (1817).

$a = 6,376985^{m}$, $\log a = 6,8046154$,
$e^2 = 0,00646951$, $\log e^2 = \bar{3},8108714$,
$\alpha = 1 : 30864$, $\log \alpha = \bar{3},5105477$.

Ellipsoïdes de Bessel (1841).

$a = 6,377397^{m}$, $\log a = 6,8046435$,
$e_2 = 0,00667437$, $\log e^2 = \bar{3},3244104$,
$\alpha = 1 : 299153$, $\log \alpha = \bar{3},5241069$.

Ellipsoïde de Clarke (1880), utilisé depuis 1899 pour les triangulations du Service géographique en France, en Algérie, au Maroc et au Levant.

$a = 6,378249^{m}$, $\log a = 6,8047015$,
$e^2 = 0,00680349$, $\log e^2 = \bar{3},8327316$,
$\alpha = 1 : 293,466$, $\log \alpha = \bar{3},5324422$.

Ellipsoïde de Helmert (1907).

$a = 6,378200^{m}$, $\log a = 6,8546981$,
$e^2 = 0,00669339$, $\log e^2 = \bar{3},8256462$,
$\alpha = 1 : 298,3$, $\log \alpha = \bar{3},5253468$.

Ellipsoïde de Hayford (1909), adopté par l'Union géodésique et géophysique internationale dans sa réunion de Madrid (1925).

$a = 6,378249^{m}$, $\log a = 6,8047109$,
$e^2 = 0,0067227$, $\log e^2 = \bar{3},8275418$,
$\alpha = 1 : 297,0$ $\log \alpha = \bar{3},5272436$.

On voit combien peu, en somme, ces valeurs s'écartent les unes des autres, bien que dans leur détermination entrent des arcs mesurés dans les régions du globe très différentes.

Voici maintenant, en adoptant pour a et e^2 les valeurs de l'ellipsoïde de Clarke (1880), soit

$$a = 6378349^{m}, \qquad e^2 = 0,00680349,$$

les valeurs des rayons de courbure principaux N et R, calculés de 5 grades en 5 grades, de 0 grade à 55 grades, ainsi que celles du rayon de courbure moyen $\sqrt{NR}$. On a pris a pour unité; il suffirait donc d'ajouter le logarithme de $\log a = 6,8046981$ aux nombres suivants pour avoir les logarithmes de ces divers rayons en mètres :

Ellipsoïde de Clarke (1880).

Latitude.	Rayons de courbure principaux		Rayons de courbure moyen
	log N.	log R.	$\log\sqrt{N.\,R.}$
g			
0	0,0000000	9,9970352	9,9985176
5	0,0000091	9,9970625	9,9985358
10	0,0000361	9,9971437	9,9985899
15	0,0000805	9,9972768	9,9986786
20	0,0001411	9,9974585	9,9987998
25	0,0002164	9,9976846	9,9989505
30	0,0003049	9,9979493	9,9991270
35	5,9954037	9,9982463	9,9993250
40	0,0005110	9,9985682	9,9995396
45	0,0006240	9,9989072	9,9997656
50	0,0007399	0,9992550	9,9999975
55	0,0008559	9,9996026	5,0002294
60			

Le même tableau est donné ci-après pour l'ellipsoïde de Hayford qui, rappelons-le, a été adopté en 1925 par l'Union géodésique et géophysique internationale à son assemblée de Madrid.

Ellipsoïde de Hayford (1909).

Latitude.	Rayons de courbure principaux		Rayon de courbure moyen
	log N.	log R.	$\log\sqrt{N.R}$
0°	0,0000000	9,9970706	9,9985353
5	0,0000111	9,9971038	9,9985575
10	0,0000441	9,9972026	9,9986233
15	0,0000978	9,9973640	9,9987309
20	0,0001709	9,9975831	9,9988770
25	0,0002609	9,9978532	9,9990571
30	0,0003653	9,9981663	9,9992658
35	0,0004808	9,9985129	9,9994969
40	0,0006040	9,9988825	9,9997433
45	0,0007312	9,9992640	9,9999976
50	0,0008584	9,9996456	0,0002520
55	0,0009825	0,0000158	0,0004988
60	0,0010977	0,0003634	0,0007305
65	0,0012024	0,0006778	0,0009401
70	0,0012929	0,0009492	0,0011211
75	0,0013663	0,0011695	0,0012679
80	0,0014205	0,0013318	0,0013761
85	0,0014536	0,0014313	0,0014424
90	0,0014648	0,0014648	0,0014648

On constate ainsi que la surface mathématique de la Terre s'écarte peu d'une sphère quel que soit l'ellipsoïde de référence que l'on considère. La courbure moyenne, au 45ᵉ parallèle (ou au parallèle de 50 grades), est à très peu près celle d'une sphère ayant pour rayon 1. De là aux pôles elle diminue peu à peu, en tout de $\frac{1}{300}$ environ; vers l'équateur, elle augmente de $\frac{1}{300}$ sensiblement. La variation de courbure transversale est deux fois plus petite.

Il faudra donc se représenter nos triangles géodésiques comme étant reportés sur une série de sphères de rayon $\sqrt{NR}$, variant d'une manière pratiquement continue puisque les côtés de ces triangles

n'ont qu'une amplitude d'une vingtaine de minutes, et l'on devra, dans les formules trigonométriques données pour leur calcul, remplacer le rayon supposé constant r d'une sphère unique par le rayon moyen $\sqrt{NR}$, variable d'un triangle à l'autre. Ce changement porte seulement sur le calcul de l'excès sphérique des triangles partiels par lesquels on détermine les segments de la méridienne. Évidemment il n'y a pas de cercle vicieux à employer ici des quantités N, R qui dépendent des éléments cherchés de l'ellipsoïde terrestre, car les valeurs les plus grossièrement approchées de ces éléments suffisent amplement.

Donnons ce petit calcul pour un triangle équilatéral de 40000^{m} de côté dans toute l'étendue de la triangulation française c'est-à-dire, successivement, par les colatitudes de 42, 46 et 50 degrés, sur l'ellipsoïde de Clarke (1880).

λ.	$\log a^2 NR$.				
42°.....	13,6101	$\log \frac{1}{2}$	9,6990 — 10		
46.....	13,6097	$\log 4000^2$	9,2041		
50.....	13,6093	$\log \sin 60^{\circ}$	9,9375 — 10		
		$\log 206265''$ ...	5,3145		
			14,1551	14,1551	14,1551
		$\log a^2 NR$	13,6101	13,6097	13,6093
		$\log \varepsilon$	0,5450	0,5454	0,5458
		ε	3″,508	3,511	3,514

Voilà à quoi se réduit l'influence de l'aplatissement sur les calculs géodésiques dont nous nous sommes occupés jusqu'ici. Cela tient évidemment à la presque sphéricité du globe et à la petitesse de nos triangles.

Voici encore quelques données utiles sur la figure de la Terre :

Ellipsoïde de Hayford (1909).

$a = 6.378388^{m}$, $\alpha = 1 : 297,0$.

Latitude $90° - \lambda$.	$\log \rho$.	$\psi = \varphi - \lambda$.	Longueur de 1° sur le méridien.	Longueur de 1° sur le parallèle.
°		′ ″	m	m
0	0,0000000	0. 0,00	110576	111324
5	9,9999890	2. 0,40	110584	110903
10	9,9999563	3.57,18	110609	109644
15	9,9999028	5.46,82	110650	107555
20	9,9998302	7.26,01	110706	104651
25	9,9997405	8.51,75	110775	100954
30	9,9996366	10. 1,45	110855	96490
35	9,9995214	10.52,95	110943	91292
40	9,9993984	11.24,69	111038	85398
45	9,9992713	11.35,66	111135	78851
50	9,9991440	11.25,49	111233	71699
55	9,9990204	10.54,46	111328	63997
60	9,9989042	10. 3,48	111417	55803
65	9,9987990	8.54,06	111498	47178
70	9,9987081	7.28,32	111567	38188
75	9,9986343	5.48,85	111624	28903
80	9,9985799	3.58,69	111666	19395
85	9,9985465	2. 1,20	111691	9735
90	9,9985353	0. 0,00	111700	0

La longueur des arcs de 1° du méridien n'a pas été calculée par la formule (5), mais par $d\rho = \mathrm{R}\, d\lambda$, — en faisant $d\lambda = \frac{3600''}{206265}$ (1) —, ce qui est bien suffisant.

(1) Ou, ce qui revient au même, $d\lambda = 3600'' \times \sin 1''$.

CHAPITRE XXI.

ARCS DE MÉRIDIENS MESURÉS EN DIVERS LIEUX. DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DE L'ELLIPSOÏDE TERRESTRE.

Depuis les célèbres mesures exécutées vers 1730 par les Académiciens français en Laponie, en France et au Pérou, les travaux géodésiques ont traversé trois époques différentes :

1° La première est celle de la fondation du système métrique. La méridienne de France est mesurée, pour la seconde fois, par Méchain et Delambre avec les méthodes et les instruments de Borda. Les mesures existantes ne permettent pas de décider de la véritable figure de la Terre ; on les calcule en *supposant* que la Terre est un ellipsoïde de révolution. Aplatissement $\frac{1}{334}$.

2° Au retour de la paix, toutes les nations civilisées entreprennent des travaux géodésiques à l'imitation de la France. Apparaissent l'arc anglais de 9°, celui de Russie de 8°, celui des Indes de 3° et plusieurs petits arcs en Danemark, au Hanovre, en Prusse. Les calculs d'Airy et de Bessel montrent que ces mesures s'accordent bien avec l'hypothèse précédente, et qu'il n'est pas nécessaire de recourir à celle d'un sphéroïde quelconque. Aplatissement $\frac{1}{299}$.

3° C'est l'époque où commencent et se poursuivent les mesures des arcs gigantesques, 25° en Russie, 22° par l'Angleterre et la France, 24° aux Indes, l'arc de Lacaille au Cap mesuré de nouveau et étendu à 4° par les Anglais. Le calcul de ces mesures *prouve* que la Terre est sensiblement un ellipsoïde de révolution. Aplatissement $\frac{1}{297}$.

Elles se continuent à l'époque actuelle, où l'on reprend avec

des procédés nouveaux et des méthodes plus précises les déterminations d'anciens arcs : arc de l'Équateur (nouvelle méridienne de Quito) de 6°; arc du Spitzberg de 3° qui doit remplacer l'arc de Laponie; arc en cours d'exécution du Cap au Caire; arcs obliques des États-Unis suivant le littoral de l'Atlantique et celui de l'océan Pacifique; ces opérations donneront des valeurs plus précises encore de l'aplatissement.

Ainsi que nous le verrons plus loin, la figure de la Terre est étudiée en outre au moyen des observations du pendule dont Picard, puis Bouguer et La Condamine donnèrent les premiers exemples. Par cette méthode, totalement indépendante de la première, on trouve aujourd'hui $\frac{1}{299}$ pour l'aplatissement.

Détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre.

Nous allons exposer comment, à l'aide d'un ensemble de mesures d'arcs de méridien, on détermine par le calcul les éléments de l'ellipsoïde terrestre. Nous prendrons comme exemple la détermination faite par Faye. Tout ensemble de mesures d'arcs se traiterait, d'ailleurs, d'une façon analogue.

Nous donnerons tout d'abord le tableau des arcs employés, en remarquant qu'ainsi que nous l'avons dit déjà, on ne s'est pas contenté d'observer les colatitudes λ et λ' aux deux bouts de l'arc mesuré; on les a déterminées également en un certain nombre de stations intermédiaires, afin de multiplier les moyens de comparaison entre la figure théorique de la Terre et sa figure réelle.

Tableau des arcs méridiens employés.

Stations.	Colatitudes.	Longueurs des arcs (1).
Arc russo-suédois.		
	o ′ ″	T
Fuglenaes	19.19.48,7	0,0
Stuor-Oïvi	21.19. 1,6	113 753,9
Tornea	24.10.15,3	276 975,8
Kilpi	27.21.55,0	459 770,1
Hogland	29.54.49,9	605 483,7
Dorpat	31.37.12,4	703 022,3
Jacobstadt	33.29.55,2	810 302,9
Nemesch	35.20.54,1	916 033,8
Belin	37.57.17,8	1 064 843,3
Kremenetz	39.54.10,0	1 176 062,3
Ssuprunkrowski	41.14.56,9	1 252 813,7
Wodolui	42.58.34,8	1 351 371,7
Nekrassowka	44.39.57,2	1 447 786,8
Arc anglo-français.		
Saxaword	29.10.21,4	0,0
Great Stirling	32.32.10,9	192 273,0
Durham	35.13.53,8	346 261,5
Greenwich	38.31.21,7	534 146,6
Dunkerque	38.57.51,6	559 388,3
Panthéon	41. 9.10,6	684 333,1
Carcassonne	46.47. 5,7	1 005 472,9
Barcelone	48.37.12,1	1 110 028,8
Montjouy	48.38.15,0	1 110 972,9
Formentera	51.20. 3,9	1 264 645,5
Arc de Prusse.		
Memel	34.16.19,6	0,0
Kœnigsberg	35.17. 9,5	57 965,4
Trunz	35.46.48,5	86 177,0
Arc danois.		
Lyssabel	35. 5.49,6	0,0
Lauenbourg	36.27.43,0	87 436,5

(1) Les longueurs sont exprimées en toises.

Stations.	Colatitudes.	Longueurs des arcs.
	Arc de Hanovre.	
	° ′ ″	T
Altona	36.27.14,7	0,0
Gœttingue	38.28.12,1	115 163,7
	Arc des Indes.	
Shahpur	57.38.25,9	0,0
Khimnana	59.37.48,2	94 150,9
Kaliana	60.29.11,7	142 807,3
Garinda	62. 4.30,0	233 214,8
Khamor	64.14.49,1	356 620,7
Kalianpur	65.52.49,2	449 499,9
Fikri	67.58.56,2	568 950,2
Walwari	69.15.38,7	641 455,3
Damargidda	71.56.45,2	793 999,4
Darur	73.50.13,9	901 434,0
Honur	75. 4.38,5	971 864,6
Bangalore	77. 0. 8,2	1 081 021,8
Putchapoliam	79. 0.18,9	1 194 776,9
Kudankulam	81.47.49,6	1 353 216,9
	Arc du Pérou.	
Cotchesqui	89.57.28,6	0,0
Tarqui	93. 4.32,1	176 875,5
	Arc du Cap.	
North-End	119.44.17,7	0,0
Heeren logement Berg	121.58. 9,1	126 906,5
Royal Observatory	123.56. 3,2	238 701,8
Zwarte Kop	124.13.32,1	255 308,6
Cape Point	124.21. 6,3	262 468,6

Bien qu'on ait déterminé sur chaque arc la colatitude de plusieurs stations intermédiaires, afin d'étudier en détail la figure de la Terre dans ces régions, nous n'emploierons, pour abréger, que l'arc total et les colatitudes extrêmes. Si la Terre est réellement un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles, l'arc s du méridien s'exprimera par la formule (5). En effectuant les produits de M, N, P, ...

par $1 - e^2$, on aura

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} s = a \Bigg[& \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4\right) \frac{\alpha}{206\,265''} \\ & + \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{12}{64} e^4\right) \sin\alpha \cos 2\lambda_1 + \frac{15}{128} e^4 \sin 2\alpha \cos 4\lambda_1 \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Nous négligerons les termes en e^6; ils influent à peine sur le chiffre des dixièmes de toise. Pour former les équations de condition linéaire que nous traiterons par la méthode des moindres carrés, il faut obtenir au préalable des valeurs approchées des inconnues a et e^2. Les observations du pendule nous ont donné (p. 255 du 1er fascicule)

$$\mu = \frac{1}{294}.$$

Conservant cette valeur, on en déduit (1)

$$\log e^2 = 7,83194.$$

L'arc russo-suédois, calculé par la formule (6) avec cette valeur, donne

$$a = 3\,272\,625^{\mathrm{T}}.$$

Avec cette première évaluation de a et de e^2, la formule (6) devient

$$(s) = [1,1997322]\alpha + [4,22263]\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + [1,250]\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1 \ (2).$$

En calculant par cette formule les longueurs des arcs mesurés, on trouve :

	s observé.	(s) calculé.	$s - (s)$.
	T	T	T
Arc russo suédois....	1 447 786,7	1 447 786,7	0,0
» anglo-français...	1 264 645,8	1 264 692,7	−46,9
» de Prusse.....	86 177,0	86 134,8	+38,6
» de Danemark.....	87 437,0	87 466,7	−30,2
» de Hanovre.....	115 164,0	115 102,8	+60,9
» des Indes.....	1 353 210,9	1 353 278,3	−67,4
» du Pérou.....	176 875,5	176 866,0	+ 9,5
» d'Afrique.....	262 470,4	262 477,7	− 7,3

(1) En remarquant que $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \mu(2 - \mu)$.

(2) Ici α est exprimé en secondes et les coefficients entre parenthèses sont des logarithmes.

Ainsi les valeurs provisoires de a et e^2 sont déjà très approchées. Nous allons les faire varier de petites quantités da et de^2, de manière à réduire la somme des carrés des écarts au minimum. L'expression précédente de (s), différentiée par rapport à a et e^2, donne

$$s-(s)=\frac{(s)}{a}da+\left[-\alpha\left(\frac{1}{4}+\frac{6}{64}e^2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{24}{64}e^2\right)\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + \frac{15}{64}e^2\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1\right]a\,de^2;$$

il suffit d'y introduire les données numériques relatives à chaque arc; on forme ainsi les équations de condition suivantes :

			T	Résidus. T
Arc russo-suédois...	$0,4424\,da$	$+0,0296\,a\,de^2=$	0,0	+11,8
» anglo-français..	0,3864	−0,0512	−46,9	−22,4
» de Prusse.....	0,0263	+0,0001	+38,6	+39,6
» de Danemark...	0,0267	−0,0005	−30,2	−29,1
» de Hanovre,....	0,0352	−0,0020	+60,9	+62,5
» des Indes.....	0,4135	−0,3361	−67,4	+1,1
» du Pérou.....	0,0540	−0,0543	+9,5	+20,1
» du Cap.....	0,0802	−0,0668	−7,3	+3,1

On voit que les petits arcs de Prusse, de Danemark et de Hanovre sont sans influence sur la détermination de e^2. A cet égard, l'arc indien est tout à fait prépondérant. Les équations finales

$$0,5280\,da-0,1524\,a\,de^2=-43,71,$$
$$-0,1524\,da+0,1216\,a\,de^2=+24,88$$

donnent

$$da=-37^{\mathrm{T}},2,\qquad a\,de^2=+158^{\mathrm{T}},05,$$

d'où

$$de^2=0,000\,048\,3\qquad\text{et}\qquad e^2=0,006\,839\,5;\qquad \log e^2=7,835\,02.$$

Si l'on pose $\mu=\frac{1}{\nu}$, comme $1-e^2=(1-\mu)^2$, la correction $d\nu$ du dénominateur 294 de l'aplatissement est

$$d\nu=-\frac{\nu^3}{2(\nu-1)}de^2.$$

Ici on trouve

$$d\nu=-2,09.$$

En portant les valeurs de ∂a et de $a\,\partial e^2$ dans les équations de condition, on obtient les résidus inscrits à côté de ces équations. La racine carrée de la somme des carrés divisée par $8-2$ est $\pm 35^{\mathrm{T}},07$, dont le produit par $0,6745$ donne $\pm 23^{\mathrm{T}},6$ pour l'erreur probable d'une mesure d'arc de méridien. On résoudra de nouveau les deux équations précédentes après y avoir remplacé ∂a par x, $a\,\partial e^2$ par y et les seconds membres par 1 et 0; on trouve ainsi

$$\sqrt{x} = 1,7;$$

par suite, l'erreur probable de a sera

$$\pm 23^{\mathrm{T}},6 \times 1,7 = 40^{\mathrm{T}},7.$$

On résoudra les mêmes équations après avoir remplacé les seconds membres par 0 et 1; on trouve ainsi

$$\sqrt{y} = 3,6;$$

l'erreur probable de $a\,\partial e^2$ est donc $\pm 84^{\mathrm{T}},7$, et celle du dénominateur de μ sera $\pm 1,1$. La solution est donc

$$a = 3,272\,587^{\mathrm{T}},6 \pm 40^{\mathrm{T}},7 \quad (^1), \qquad \mu = \frac{1}{291,9 \pm 1,1},$$

ce qui donne

$$s = [1,199\,722\,0]\alpha'' + [4,225\,71]\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + [1,254]\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1.$$

Le coefficient de $a\,\partial e^2$ dans l'équation relative aux Indes est si prépondérant qu'on pourrait craindre que cette valeur de μ ne fût réellement déterminée que pour cette région de la Terre. Il n'en est rien : si l'on supprime la sixième équation, on trouve

$$a = 3\,272\,588^{\mathrm{T}},0, \qquad \mu = \frac{1}{291,4},$$

résultats du même ordre que ceux indiqués précédemment, sauf que l'incertitude de la valeur de μ est plus forte (^{2}).

(^{1}) En mètres, $a = 6\,378\,393^{\mathrm{m}} \pm 79^{\mathrm{m}}$.

(^{2}) La valeur trouvée pour l'aplatissement $\frac{1}{291,9}$ n'est plus en concordance avec les valeurs actuellement admises et dont la moyenne est $\frac{1}{297}$ environ. Nous n'avons voulu en reprenant l'exemple de Faye, en 1881, que donner la marche que l'on suit dans la détermination des éléments de l'ellipsoïde par des mesures d'arcs du méridien.

La première conclusion à tirer de ces calculs est que la surface mathématique du globe terrestre, celle des mers idéalement prolongée par des canaux par-dessous les continents, est *à très peu près* un ellipsoïde de révolution. Comme tous les grands arcs se trouvent dans l'hémisphère nord, on pourrait craindre que l'autre hémisphère ne présentât des différences sensibles qui nous échapperaient ici, à cause de la petitesse de l'arc du Cap; mais toutes les déterminations des éléments de l'ellipsoïde faites depuis, ainsi que les valeurs de l'aplatissement déduites des observations du pendule, ne confirment nullement cette crainte.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, la Section de Géodésie de l'Union géodésique et géophysique internationale, après discussion de toutes les valeurs des éléments de l'ellipsoïde terrestre actuellement obtenues, a adopté, lors de sa réunion à Madrid, en 1925, les valeurs suivantes :

$$a = 6.378.388^{m}, \qquad e^2 = 0{,}0067227, \qquad \mu = \frac{1}{297{,}0}$$

comme devant être celles de l'ellipsoïde de référence international.

Une dernière remarque sur ces calculs. Nous avons traité les écarts ou résidus comme si leur grandeur probable était la même quelle que fût l'étendue des arcs mesurés. Cela n'est pas tout à fait exact. Mais les opérations géodésiques sont d'une précision telle que leurs erreurs propres sont à peu près négligeables, même pour les plus grands arcs. Ainsi l'erreur probable de l'arc russo-suédois, en ce qui concerne la partie géodésique, n'est que de $\pm 6^{T}$, malgré son énorme amplitude de 25°. Il n'en est pas de même, comme on le verra plus loin, des colatitudes des extrémités. Là est donc la source principale, on peut dire *a posteriori* presque unique, des écarts ci-dessus. Or la détermination de ces colatitudes est indépendante de la longueur de l'arc s.

Nous exposerons au Chapitre XXVI comment on tient compte des erreurs accidentelles à craindre dans la détermination des colatitudes, quand on fait intervenir non seulement les colatitudes des extrémités des arcs, comme nous l'avons fait ici, mais encore celles des points intermédiaires.

CHAPITRE XXII.

SYSTÈME MÉTRIQUE. — ARCS DE PARALLÈLE.

Lorsque la Commission du système métrique, convoquée à Paris à la fin du dernier siècle, se décida à prendre pour unité de longueur la 10 000 000^e partie de quart du méridien, elle présumait que la Terre était un ellipsoïde de révolution ; on vient de voir que l'ensemble des mesures géodésiques actuelles lui donne raison sur ce point. La Commission disposait de l'arc du Pérou, de l'arc de Laponie et des triangulations de Cassini en France. Ces données étaient insuffisantes pour déterminer la figure et les dimensions du globe terrestre d'où l'on voulait tirer l'étalon du système métrique. Elle résolut de faire mesurer de nouveau la méridienne de Dunkerque à Barcelone et elle chargea de ces opérations les astronomes Delambre et Méchain.

Cette grande opération terminée, il fallut se résoudre à exclure l'arc de Laponie à cause de son peu d'exactitude. Il ne restait donc plus que l'arc du Pérou de 3° et l'arc de France de 10°. En introduisant ces données dans l'expression de s que nous venons d'employer, on forme deux équations distinctes entre a et e^2, et en les divisant membre à membre on obtient une équation en e^2 et e^4. La Commission a trouvé ainsi $e^2 = 0{,}005979$, ce qui répond à un aplatissement de $\frac{1}{334}$.

Pour avoir le quart du méridien, que nous désignerons par Q, il suffit de faire $\lambda = 0$, $\lambda' = 90^\circ$ dans l'équation (6) de la page 91, ce qui donne $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (en parties du rayon), $2\lambda_1 = 90^\circ$; par conséquent,

$$Q = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4\right)\frac{\pi}{2}.$$

En divisant S par Q, on élimine a et l'on a

$$\frac{S}{Q} = \frac{\alpha}{206\,265''}\,\frac{2}{\pi} + \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{24}{64}e^4\right)\frac{2}{\pi}\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + \frac{15}{128}e^4\,\frac{2}{\pi}\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1,$$

équation où l'on mettra pour S la longueur de l'arc français.

On sentait bien que e^2 n'était pas déterminé avec une précision suffisante par les seuls arcs de France et du Pérou, mais la Commission trouva, dans une particularité de l'arc français, le moyen d'éluder cette incertitude. C'était de prolonger cet arc jusqu'à l'île Formentera (une des Baléares). Dans ces conditions, en effet, l'arc français se trouvant bissecté exactement par le parallèle de 45°, on a $\lambda_1 = 45°$, et l'équation précédente se réduit à

$$\frac{S}{Q} = \frac{\alpha}{206\,265}\,\frac{2}{\pi} - \frac{15}{128}e^4\,\frac{2}{\pi}\sin 2\alpha;$$

e^2 a disparu; l'incertitude ne porte plus que sur le dernier terme, qui est lui-même extrêmement petit.

On résolut donc : 1° de reprendre la mesure de Cassini, de Dunkerque à Perpignan, parce que cette mesure n'avait pas la précision requise; de la prolonger, à travers le territoire espagnol, jusqu'à l'île de Formentera (¹).

L'arc français ainsi porté à 12° n'aurait encore été que le $\frac{1}{7}$ ou le $\frac{1}{8}$ de Q. Toute erreur commise dans cette mesure devait donc être multipliée par 7, 5. De là la nécessité de donner aux opérations géodésiques et astronomiques une précision toute nouvelle.

En effet, pour avoir le mètre à $0^{mm},1$ près, il fallait être sûr de ne pas commettre sur Q une erreur de 1000^m ou de 500^T, et, par suite, de 67^T sur s, c'est-à-dire sur la longueur de l'arc français. De plus, en supposant un succès complet dans la partie géodésique, il fallait que l'amplitude astronomique $\lambda' - \lambda$ ou α ne comportât pas une erreur de 4″, car 4″, à raison de 15^T pour 1″, font aussi 69^T. Il fallait donc déterminer les colatitudes à 1″ près, degré de précision dont on était bien loin à cette époque.

(¹) Le prolongement de la méridienne de France jusqu'à Formentera a été exécuté longtemps après l'établissement du système métrique par Biot et Arago, et ne lui a servi que de vérification.

Borda fut chargé de créer des instruments nouveaux. Il produisit, à cette occasion, l'invention du cercle répétiteur, si précieux à une époque où l'art de diviser les cercles des instruments était encore dans l'enfance, l'invention des règles de platine à thermomètre bimétallique, etc. Les opérations géodésiques furent exécutées au milieu de mille difficultés par deux excellents astronomes, au nord par Delambre, au sud par Méchain. Mais la guerre vint interrompre les opérations que Méchain poursuivait en Espagne; on dut se contenter de l'arc de 9°,5 compris entre Dunkerque et Montjouy, près de Barcelone; e^2 reparut dans l'équation finale, heureusement avec un très petit coefficient. Le calcul fut fait de la manière suivante :

Dunkerque...	$38.57.49,5$	$s = 551583,6$	
Montjouy.....	$48.38.15,2$		
α.....	$9.40.25,7 = 34825'',7$	$\log\alpha''$.....	$4,5418999$
$2\lambda_1$.....	$87.36.\ 4,7$	206265.....	$5,3144251$
2α.....	$19.20.51,4$	$\log\alpha$.....	$9,2274748$
$4\lambda_1$.....	$175.12.\ 9,4$	$\log\frac{2}{\pi}$.....	$9,8038801$
		$\log 1^{er}$ terme.	$9,0313549$

$\log e^2$.....	$7,77663$	$\log e^4$.....	$5,55326$
$\log\frac{3}{4}$.....	$9,87506$	$\log\frac{24}{64}$.....	$9,57403$
	$7,65169$		$5,12729$

$\frac{3}{4}e^2$....	$0,0044842$	$\log A$.....	$7,65298$	$\log e^4$.....	$5,55326$
$\frac{24}{64}e^4$...	$0,0000134$	$\log\frac{2}{\pi}$.....	$9,80388$	$\log\frac{15}{128}$.....	$9,06888$
A.....	$0,0044976$	$\log\sin\alpha$.....	$9,22541$	$\log\frac{2}{\pi}$.....	$9,80388$
		$\log\cos 2\lambda_1$..	$8,62172$	$\log\sin 2\alpha$...	$9,52022$
		$\log 2^e$ terme.	$5,30399$	$\log\cos 4\lambda$...	$9,99848\,n$
				$\log 3^e$ terme.	$3,94472\,n$

1^{er} terme.....	$0,10748673$
2^e »	$0,00002014$
3^e »	$-0,00000088$
	$0,10750599$

Par conséquent,

$$\frac{551583,6}{Q} = 0,10750655.$$

$$\begin{aligned} \log s \ldots\ldots\ldots & \quad 5,7416114 \\ & \quad 9,0314327 \\ \log Q \ldots\ldots\ldots & \quad 6,7101787 \qquad Q = 5130725^{T} \end{aligned}$$

Le nombre de la Commission est, comme on sait, $5\,130\,740^{T}$. Mais ce qu'on ignorait alors et ce que nous savons aujourd'hui, c'est que les attractions purement locales, accidentelles, peuvent fort bien altérer de quelques secondes l'amplitude angulaire d'un arc géodésique. En outre, malgré l'habileté des astronomes Delambre et Méchain, qui ont fait la triangulation et déterminé les colatitudes extrêmes, le défaut inhérent aux instruments répétiteurs dont nous avons donné l'explication (page 118, 1^er^ fasc.) est fort capable de fausser sensiblement les colatitudes. Il suffirait de 6″ d'erreur, provenant de ces deux causes réunies, sur l'amplitude astronomique de l'arc compris entre Dunkerque et Montjouy, pour introduire une erreur de 90^{T} dans la longueur calculée de s, et, par suite, de 900^{T} dans celle de a.

En fait, nous sommes aujourd'hui en état de soumettre les opérations de la grande Commission à des vérifications, en nous servant des déterminations actuelles des éléments de l'ellipsoïde. Faisons-le, par exemple, en prenant la valeur de s que nous avons déduite, page 93, de l'ensemble des mesures employées par Faye.

Il nous suffira de faire, dans le premier terme de la valeur de s,

$$\alpha = 90^{\circ} = 324000''.$$

Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned} \log 1^{er}\ \text{coefficient} \ldots\ldots & \quad 1,1997220 \\ \log 324000 \ldots\ldots\ldots & \quad 5,5105450 \\ \log Q \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad 6,7102670 \end{aligned}$$

$$Q = 5131758^{T}.$$

Ainsi, l'erreur de la Commission serait de 1018^{T}; le mètre serait trop court d'un dix-millième de toise ou de $0^{l},0864$. Au lieu de prendre pour le mètre $3^{p}11^{l},296$, il aurait fallu $3^{p}11^{l},382$.

Faut-il changer la longueur de l'étalon légal et lui donner la longueur susdite, vraisemblablement plus exacte et qui alors repré-

sente mieux la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre ?

Si l'on agissait ainsi, on sacrifierait le côté essentiel de tout système de poids et de mesures, c'est-à-dire l'invariabilité. La longueur de l'étalon, au lieu d'être fixe, deviendrait une quantité variable et relative aux progrès de la Science. Il eût déjà fallu retoucher le mètre à plusieurs reprises, il faudrait le faire après chaque grande opération géodésique de mesure de longueur d'arc. A chaque fois, il faudrait modifier le mètre étalon, ce qui serait absurde.

La définition légale du mètre n'est pas de dire : *c'est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre;* mais bien : le mètre est la longueur, de bout en bout, d'une règle de platine qui a été prise pour unité de longueur en vertu d'une loi, et qui est déposée aux Archives nationales. A quoi l'on doit ajouter, à titre de renseignement précieux, que cette longueur est, à très peu près, la dix-millionième partie du quart du méridien, et qu'on peut l'employer comme telle, sans erreur sensible, dans toutes les applications à la géographie et à la navigation.

Une nouvelle Commission internationale, ayant en vue de faciliter la propagation universelle du système métrique, s'est réunie à Paris, en 1870, pour transformer l'étalon légal à bouts en un étalon à traits. Aucun de ses membres étrangers n'a eu l'idée de saisir cette occasion pour ajouter un appoint quelconque à l'étalon actuel.

Un Bureau International de Poids et Mesures a été créé par une Commission diplomatique en 1875 (Convention du Mètre) et installé en France, à Sèvres, au Pavillon de Breteuil. Il avait pour mission de construire et de conserver les étalons prototypes et de leur comparer les étalons nationaux fournis aux différents États.

Les étalons définitifs furent sanctionnés par la Conférence générale de 1889. Les nouveaux prototypes, qui sont des étalons à traits, ont comme point de départ la longueur exacte de l'étalon à bouts conservé dans nos Archives.

Ce qu'il y avait de plus juste et de plus élevé dans l'idée de la grande Commission de 1795, lorsqu'elle a voulu rattacher son unité fondamentale aux dimensions de la Terre, c'était d'ôter au système métrique tout caractère d'une nationalité particulière, et de le rendre ainsi admissible pour toutes les nations. Aujour-

d'hui (1927) vingt-huit États ont adhéré à la Convention du Mètre; le système métrique est obligatoire en Allemagne, en Italie, en Autriche, en Belgique, en Tchéco-Slovaquie, en Hongrie, en Serbie, en Espagne, en Danemark, en Suède, en Norvège, en Pologne, en Portugal, en Roumanie, en Russie, en Grèce, en Suisse, etc., ainsi qu'au Mexique et dans presque toute l'Amérique du Sud.

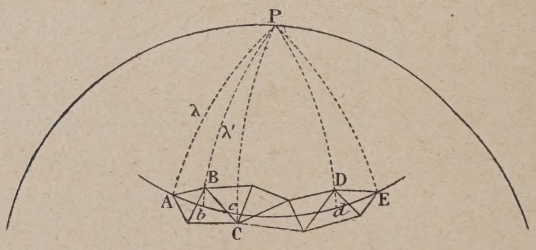
L'usage en est autorisé dans la plupart des autres pays, notamment en Grande-Bretagne et aux États-Unis. Les hommes de science de toutes les nations l'emploient presque exclusivement dans leurs travaux.

La grande pensée de la Commission de 1795 est donc entièrement réalisée.

Arcs de parallèle.

Au lieu de mesurer géodésiquement un arc de méridien, on peut mesurer un arc de parallèle terrestre, tel que AE, situé à la colatitude PA ou PE $= \lambda$. La marche est la même. On enveloppe l'arc d'une série de triangles dont on mesure les angles et dont on calcule les côtés sur l'arc de parallèle, qui se trouve ainsi décomposé en segments Ab, bc, cd, dE, dont la somme forme l'arc AE. Pour

Fig. 135.



cela, il faut encore ici déterminer astronomiquement en A la colatitude PA $= \lambda$ et l'azimut $180^\circ +$ PAB du premier côté. Le triangle PAB, sur la sphère tangente le long du parallèle, donne PB $= \lambda'$, et l'on a l'angle dièdre P par l'analogie

$$\frac{\sin P}{\sin AB} = \frac{\sin A}{\sin \lambda'},$$

qu'on remplacera par le développement donné plus haut ; et comme $Ab = PN \sin\lambda$, N étant la grande normale en A, il suffira de multiplier l'expression de P par $N\sin\lambda$; on aura donc, pour le premier segment du parallèle,

$$Ab = AB\frac{\sin A}{\sin\lambda'}\sin\lambda - \frac{1}{6}\frac{AB^3}{N^2}\frac{\sin A\sin(\lambda'+A)\sin(\lambda'-A)}{\sin^3\lambda'}\sin\lambda,$$

d'où l'on voit que N ne sert ici qu'à calculer un terme extrêmement petit, et qu'on n'a besoin que d'une valeur grossièrement approchée de cet élément.

Après avoir calculé tous les segments de cette manière, on en fait la somme pour avoir AE.

Si d'autre part on a mesuré *astronomiquement* la différence APE de longitude des stations extrêmes A et E, en comparant, par les méthodes que nous avons indiquées deux pendules bien réglées en ces deux stations, on aura L' — L par la différence des heures que ces pendules marquent au même instant. Cela posé, si l'on désigne par e^2 et a les éléments de l'ellipsoïde terrestre, la relation

$$AE = \frac{L'-L}{206265}\frac{a\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\cos^2\lambda}},$$

dans laquelle AE est donné, comme on vient de le voir, par une triangulation, est une équation nouvelle entre a et e^2 ; elle pourra concourir, avec celles que l'on tire de la mesure d'arcs de méridien, à la détermination de ces inconnues.

Des arcs de parallèle de grande amplitude ont été calculés depuis une soixantaine d'années et ont contribué à la détermination des dimensions de l'ellipsoïde terrestre. Ce sont :

1° l'arc de parallèle le long du 52e degré de latitude nord, entre Valentia, sur la côte ouest de l'Irlande, et Orsk, au sud des monts Oural, qui a une amplitude de 69 degrés de longitude, et utilise les triangulations primordiales exécutées en Angleterre, en Belgique, en Allemagne et en Russie ;

2° l'arc de parallèle le long du 47e degré de latitude nord, de Brest à Astrakan, sur la mer Caspienne, qui utilise la triangulation francaise, allemande, autrichienne et russe ; il a 51 degrés d'amplitude ;

3° l'arc de parallèle des Indes, le long du 24^{e} degré de latitude nord, avec une amplitude d'environ 20 degrés de longitude ;

4° l'arc de parallèle américain, le long du 39^{e} degré de latitude nord, de l'Atlantique à l'océan Pacifique, avec une amplitude d'environ 49 degrés de longitude.

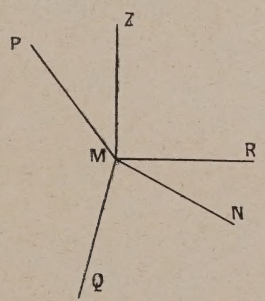
Mais, ainsi qu'on le voit, on ne dispose pas encore d'arcs de parallèles dans l'hémisphère sud. C'est une lacune qui reste à combler et qui le sera certainement un jour par les travaux des géodésiens en Afrique et en Amérique du Sud.

CHAPITRE XXIII.

COORDONNÉES GÉODÉSIQUES.

Dans les chaînes méridiennes, et en général dans tous les réseaux servant à la description géométrique d'un grand pays, on ne mesure directement les coordonnées par des opérations astronomiques qu'en un nombre très limité de sommets. On obtient celle des autres points par le calcul. Ces coordonnées calculées sont dites coordonnées géodésiques, et il y a lieu tout d'abord de bien établir leur définition par rapport aux coordonnées astronomiques.

Fig. 136.



Considérons sur le géoïde un point M dont on a déterminé les coordonnées astronomiques. Soient MZ la verticale en M et MP une parallèle à l'axe du monde. L'angle ZMP définit la colatitude astronomique du lieu.

Menons par MP un plan quelconque MPQ de direction fixe. Le dièdre des deux plans MPQ et MPZ sera la longitude astronomique de Z.

Considérons enfin le plan horizontal, c'est-à-dire le plan tangent en M au géoïde.

Dans ce plan, menons une direction quelconque MN. On appelle azimut astronomique de MN, l'angle de MN avec MR, intersection du plan ZMP avec le plan horizontal.

On appelle méridien sur le géoïde une courbe dont la longitude astronomique est constante. Les méridiens sont donc les courbes de contact du géoïde, avec des cylindres circonscrits quelconques, de génératrices perpendiculaires à l'axe du monde.

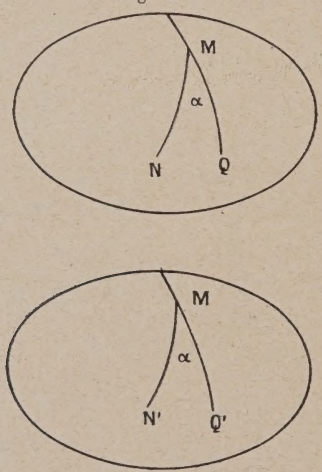
On peut encore définir le méridien comme la ligne dont l'azimut astronomique est constamment nul.

Mais il y a lieu de remarquer que cette définition ne coïncide avec la précédente que si le géoïde est de révolution. C'est aussi seulement dans ce cas que le méridien répondant à l'une ou l'autre solution est une ligne géodésique.

De même, les parallèles sur le géoïde peuvent être définis soit par des lignes de latitude constante, soit par celles dont l'azimut est constamment de 90° et ces deux définitions ne coïncident encore que sur les surfaces de révolution.

Considérons maintenant le géoïde et l'ellipsoïde de révolution qui s'en rapproche le plus et que nous prenons comme représen-

Fig. 137.



tant la surface mathématique de la Terre. Soit un point M sur le géoïde défini par ses coordonnées astronomiques ; prenons sur

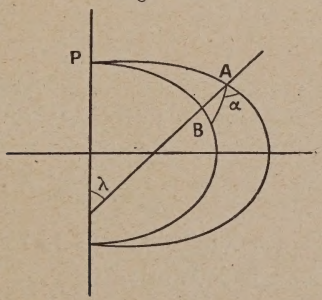
l'ellipsoïde le point M′ qui a mêmes coordonnées astronomiques que M ; convenons de plus de prendre le point M comme origine, c'est-à-dire comme point pour lequel les coordonnées astronomiques et géodésiques se confondent. Ceci posé, étant donné un point N sur le géoïde, il est défini par la longueur de la ligne géodésique MN, et l'azimut astronomique α de cette ligne géodésique en M, compté à partir du méridien MQ.

Pour avoir le point correspondant N′ de l'ellipsoïde, on mène par M′ une ligne géodésique M′N′ ayant en M′ même azimut α et sur laquelle on porte une longueur M′N′ = MN. On appelle coordonnées géodésiques du point N, les coordonnées géodésiques du point N′ calculées sur l'ellipsoïde. Elles dépendent donc essentiellement du point M pris pour origine et des dimensions adoptées pour l'ellipsoïde de référence.

Le problème de la détermination sur l'ellipsoïde des coordonnées géodésiques des points d'une triangulation se pose donc ainsi :

On connaît sur l'ellipsoïde de référence la position d'un point A donné par sa longitude et sa latitude, on connaît également la longueur de la ligne géodésique qui joint le point A à un autre point B, ainsi que l'azimut α de cette ligne géodésique sur l'horizon du point A ; calculer les coordonnées du point B (*fig.* 138).

Fig. 138.

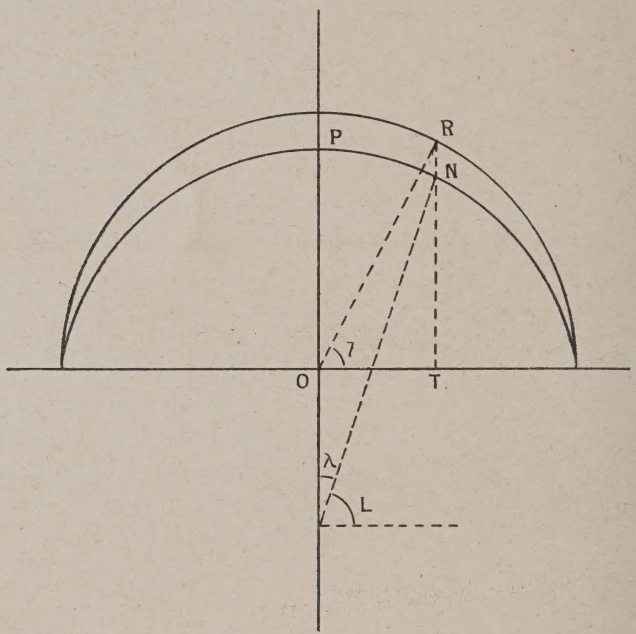


En considérant le problème en toute rigueur, il s'agit de résoudre le triangle sphéroïdique APB où PA, arc d'ellipse, est connu en fonction de la colatitude λ, de a et de e^2 et où l'on connaît également le côté AB, ligne géodésique de longueur K, et l'angle en A, supplément de l'angle α.

Les formules rigoureuses s'établissent à l'aide des propriétés de la ligne géodésique.

Nous avons vu précédemment qu'en désignant par NN′ l'élément ds de la ligne géodésique MN, α l'azimut de cet élément compté à

Fig. 139.



partir du méridien sud, r le rayon du parallèle MN_1 mené par N, $d\varphi$ l'angle NQN_1, on a (*fig.* 133, p. 76) :

$$(1) \qquad \begin{cases} r^2\, d\varphi = C\, ds, \\ r\ d\varphi = ds \sin\alpha, \end{cases}$$

d'où l'on déduit la propriété générale de toute ligne géodésique tracée sur une surface de révolution :

$$r \sin\alpha = C.$$

En appelant $d\sigma$ l'arc du méridien N_1N', on a

$$(2) \qquad d\sigma = ds \cos\alpha,$$

et en éliminant α entre les deux dernières équations, on obtient,

comme nous l'avons vu,

$$ds = \frac{r\,d\sigma}{\sqrt{r^2 - C^2}}, \tag{3}$$

$$d\varphi = \frac{C\,d\sigma}{r\sqrt{r^2 - C^2}}. \tag{4}$$

Appliquons les formules (1), (2), (3) et (4), qui sont vraies pour toutes les surfaces de révolution, à l'ellipsoïde d'axes a et b, et désignons par l ce que Legendre a appele la latitude réduite, c'est-à-dire l'angle TOR, de sorte que (*fig.* 139)

$$r = x = a\cos l,$$

$$y = b\sin l,$$

$$\operatorname{tang} L = \frac{dx}{dy} = \frac{a\sin l}{b\cos l} = \frac{a}{b}\operatorname{tang} l,$$

$$\operatorname{tang} l = \frac{b}{a}\operatorname{tang} L,$$

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$d\sigma = dl\sqrt{a^2\sin^2 l + b^2\cos^2 l};$$

nous aurons donc en définitive

$$\cos l\sin\alpha = \frac{C}{a}, \tag{5}$$

$$ds = a\sqrt{\frac{a^2\sin^2 l + b^2\cos^2 l}{a^2\cos^2 l - C^2}} \times \cos l\,dl, \tag{6}$$

$$d\varphi = \frac{C}{a^2}\frac{ds}{\cos^2 l}; \tag{7}$$

l'intégration de l'équation (6) donnerait la latitude réduite du point N′ située à une distance finie connue s du point N ; connaissant la latitude réduite, on en déduirait la latitude vraie.

L'intégration de l'équation (7), en y remplaçant $\cos^2 l$ par sa valeur tirée de l'intégration de l'équation (6), donnera la différence des longitudes, l'intégration de l'équation (5) donnera l'azimut en N′.

On arrive donc à des intégrales elliptiques pour la résolution rigoureuse du problème de la détermination des coordonnées ; la solution complète en a été donnée par Jacobi à l'aide des fonctions θ.

Legendre a donné une autre solution en développant $\sin l$ en

série suivant la formule de Taylor et en prenant comme valeur initiale $X_0 = \sin l_0$, sinus de la latitude réduite au point N.

On arrivera par l'une ou l'autre méthode à la solution rigoureuse de la question, mais les formules sont longues et compliquées.

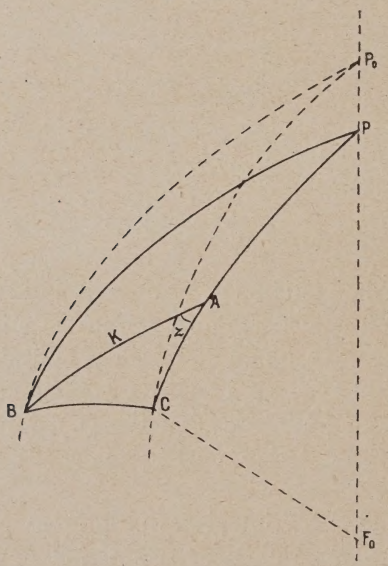
Dans la pratique de la Géodésie, on fait usage de solutions approchées plus simples, qui donnent une approximation suffisante et conduit à des formules pratiques pour les calculs.

Méthode d'Andrae.

L'une de ces méthodes, due au géodésien danois Andrae, se tient absolument dans les limites d'approximation du théorème de Legendre étendu au sphéroïde ; c'est la plus parfaite de celles qui sont fondées sur l'application de ce théorème. Nous en donnerons seulement le principe.

Considérons seulement le triangle polaire sphéroïdique PAB.

Fig. 140.



Soient AB le côté et A le point de départ, dont les coordonnées colatitude et longitude sont connues, ainsi que l'azimut Z de B sur

l'horizon de A. Les difficultés qui se présentent dans la détermination des coordonnées du point B et de l'azimut inverse quand on veut passer directement du point A au point B disparaissent presque complètement à l'aide d'une transformation très simple du problème. Si, en effet, de B, on abaisse une ligne géodésique BC perpendiculaire au méridien de A qu'elle coupe au point C, on formera un triangle sphéroïdique rectangle ABC dans lequel les côtés $AC = Q$ et $BC = P$ peuvent se déduire au cinquième ordre près du côté K et de l'angle Z (à condition de prendre pour excès sphérique du triangle ABC son excès sphéroïdique $\frac{S}{\sqrt{NR}}$), et alors, au lieu de se monvoir directement de A en B, on peut aller d'abord de A en C, puis de C en B et le problème primitif se trouve ainsi remplacé par deux autres beaucoup plus faciles à traiter.

Dans le premier, où la longitude reste la même, et où il s'agit seulement de déterminer une différence de latitude, la solution s'obtient immédiatement par la formule de rectification de l'arc d'ellipse méridienne. Dans le second, on démontre que la ligne CB peut, au cinquième ordre près, être considérée comme située sur la sphère tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle de C, de sorte que le problème posé sur le sphéroïde se transforme en un autre qui ne concerne que la sphère.

Si F_0 est le centre de cette sphère tangente en C, et soit P_0 son pôle, on n'a plus qu'à considérer pour terminer le calcul que le triangle sphérique P_0B_1C, B_1 étant le point de rencontre de la sphère et du grand rayon BF_0 et B_1C un arc de grand cercle.

On obtient ainsi des formules qui permettent de calculer les coordonnées des sommets des chaînes primordiales et qui donnent des longitudes et latitudes au millième de seconde (quatrième ordre) et les azimuts au centième (troisième ordre).

Les formules dites des Ingénieurs géographes, dues à l'ingénieur géographe Puissant, employées en France au Service géographique de l'Armée pour le calcul des coordonnées des triangulations de premier ordre complémentaire et de second ordre, sont basées sur la substitution, à l'ellipsoïde, de la sphère tangente le long du parallèle du sommet origine. On établit tout d'abord les formules sur la sphère et l'on introduit ensuite dans les formules obtenues les termes correctifs nécessaires pour les ramener à l'ellip-

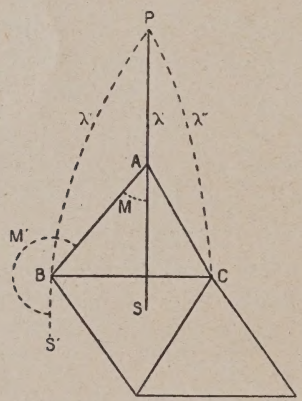
soïde, avec une précision suffisante pour la pratique des opérations géodésiques et topographiques.

Méthode des Ingénieurs géographes.

Le problème se pose donc de la façon suivante :

On a déterminé astronomiquement, au point de départ A d'une triangulation, la colatitude λ et l'azimut $SAB = M$ de l'un des

Fig. 141.



côtés AB, c'est-à-dire l'azimut du sommet B sur l'horizon du point A. D'autre part, tous les angles de la triangulation ont été mesurés et leurs côtés calculés en mètres. Il s'agit de déterminer de proche en proche les coordonnées géographiques de tous les sommets B, C, D, ..., c'est-à-dire leurs colatitudes et leurs longitudes comptées à partir du méridien initial du point A.

Prenons, comme surface de la Terre, la sphère tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle du sommet A. Soient, sur cette sphère, P le pôle, PAS le méridien du point A, PBS celui du point voisin B.

Dans le triangle sphérique PAB, nous connaissons deux côtés $PA = \lambda$ et $AB = \frac{K}{N}$ (K étant le côté en mètres du triangle géodésique ABC et N la grande normale, rayon de la sphère tangente) et l'angle compris $PAB = 180^\circ - M$. On en déduira donc les trois

autres éléments, à savoir :

PB $= \lambda'$, colatitude du second sommet B;

P ou APB, différence de longitude des points A et B;

S'BA $= M' = 180^\circ -$ PBA, azimut de A sur l'horizon de B (1).

Les formules sont, en désignant par A et B les angles du triangle PAB,

$$\cos\lambda' = \cos\lambda\cos\frac{K}{N} + \sin\lambda\sin\frac{K}{N}\cos A, \tag{1}$$

$$\sin P = \sin\frac{K}{N}\frac{\sin A}{\sin\lambda'}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)}\cot\frac{1}{2}P. \tag{3}$$

Le rapport $\frac{K}{N}$ étant très petit ($\frac{1}{160}$ environ), on en profite pour développer les formules en séries. Ainsi, par un développement identique à celui de la page 49, la formule (2) donne

$$P = \frac{K}{N}\frac{\sin A}{\sin\lambda'} - \frac{1}{6}\frac{K^3}{N^3}\frac{\sin A(\sin\lambda'+A)\sin(\lambda'-A)}{\sin^3\lambda'},$$

d'où, par une transformation facile, en appelant ΔP la différence de longitude des points A et B,

$$\Delta P = \frac{K}{N\sin 1''}\frac{\sin A}{\sin\lambda'} - \frac{1}{6}\frac{K^3}{N^3\sin 1''}\frac{\sin A}{\sin\lambda'}\left[1 - \frac{\sin^2 A}{\sin^2\lambda'}\right].$$

Avant de calculer ΔP, il faut obtenir λ'. Prenons la première équation et posons $\lambda' = \lambda + d$; le premier membre deviendra $\cos\lambda\cos d - \sin\lambda\sin d$. Développons en série les sinus et cosinus de $\frac{K}{N}$ et de d jusqu'aux termes du quatrième ordre exclusivement, et divisons les deux membres par $\cos\lambda$, nous aurons

$$-\frac{1}{2}d^2 - d\operatorname{tang}\lambda + \frac{1}{6}d^3\operatorname{tang}\lambda = -\frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2} + \frac{c}{r}\operatorname{tang}\lambda\cos A - \frac{1}{2}\frac{K^3}{N^3}\operatorname{tang}\lambda\cos A; \tag{4}$$

(1) Nous continuons, en Géodésie, à compter les azimuts comme les astronomes, à partir de la portion sud du méridien, de 0° à 360°, dans le sens rétrograde S.-O.-N.-E.

si l'on s'en tenait au premier ordre, on aurait

$$d = -\frac{K}{N}\cos A. \tag{5}$$

Pour tenir compte des termes du deuxième ordre, on remplacera $\frac{1}{2}d^2$ par $\frac{1}{2}\frac{K^3}{N^3}\cos^2 A$, ce qui donne, après avoir divisé par $\operatorname{tang}\lambda$,

$$-d = -\frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2}\frac{\sin^2 A}{\operatorname{tang}\lambda} + \frac{K}{N}\cos A \tag{6}$$

ou

$$d = -\frac{K}{N}\cos A + \frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2}\frac{\sin^2 A}{\operatorname{tang}\lambda}.$$

Pour aller jusqu'au troisième ordre, il faut remplacer, dans le premier membre de (4), $\frac{1}{2}d^2$ par sa valeur tirée de (6), en excluant les termes d'ordre supérieur au troisième, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2}\cos^2 A - \frac{1}{2}\frac{K^3}{N^3}\frac{\sin^2 A\cos A}{\operatorname{tang}\lambda},$$

et mettre pour $\frac{1}{6}d^3$ sa valeur approchée $\frac{1}{6}\frac{K^3}{N^3}\cos^3 A$. On a ainsi finalement, après réduction des termes et division par $\operatorname{tang}\lambda$,

$$d = -\frac{K}{N}\cos A + \frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2}\frac{\sin^2 A}{\operatorname{tang}\lambda} + \frac{1}{6}\frac{K^3}{N^3}\sin^2 A\cos A\left(1 + \frac{3}{\operatorname{tang}^2\lambda}\right).$$

Comme $\frac{K}{N}$ est ici exprimé en parties du rayon, on divisera le deuxième membre par le sinus d'une seconde soit en division sexagésimale de la circonférence, ou en division centésimale, suivant le cas, pour avoir d ou $\lambda' - \lambda$ en secondes.

Si l'on veut, au lieu des colatitudes λ' et λ, introduire les latitudes qui en sont les compléments, et si l'on désigne par ΔL la différence de latitude, la formule devient :

$$\Delta L = +\frac{K}{N\sin 1''}\cos A - \frac{1}{2}\frac{K^2\sin^2 A\operatorname{tang} L}{N^2\sin 1''} - \frac{K^3\sin^2 A\cos A}{N^3\sin 1''}(1 + 3\operatorname{tang}^2 L).$$

Enfin l'angle $\frac{1}{2}(A + B)$ devient, en y introduisant les azimuts réciproques M et M′,

$$\frac{1}{2}(180^\circ - M + M' - 180^\circ) = \frac{1}{2}(M' - M).$$

M′ — M ne diffère de 180° que d'un petit angle auquel les géodésiens ont donné le nom de convergence des méridiens :

$$M' - M = 180^\circ - \alpha.$$

Les angles du triangle PAB sont

$$P = \Delta P, \text{ différence des longitudes},$$
$$A = 180^\circ - M,$$
$$B = M' - 180^\circ,$$

la quatrième analogie de Néper donne

$$\cot\frac{A+B}{2}\,\text{tang}\left[90^\circ - \frac{A+B}{2}\right] = \text{tang}\left[\frac{180^\circ - (M'-M)}{2}\right] = \text{tang}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{tang}\,\frac{\alpha}{2} = \text{tang}\,\frac{\Delta P}{2}\,\frac{\cos\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}}.$$

Si l'on développe encore en série, jusqu'au troisième ordre *exclu*, car ici les termes du troisième ordre ne dépassent pas, en pratique, 0″,1, ce qui est négligeable eu égard aux erreurs d'observations azimutales, on aura pour la valeur de la convergence

$$\alpha = \Delta P \cos\frac{1}{2}(\lambda' + \lambda).$$

Nous connaissons maintenant, pour le point B, les coordonnées P et λ′ ainsi que M′, azimut de A sur l'horizon de B. En ajoutant à ce dernier l'angle ABC du triangle géodésique, on aura l'azimut M″ de C sur l'horizon de B. On se retrouve donc en B dans les mêmes conditions qu'on avait en A, et l'on déterminera les coordonnées du sommet C par des calculs identiques aux précédents.

Les géodésiens emploient, en général, dans leurs formules, les latitudes, au lieu des colatitudes. En introduisant donc ces dernières $L = 90^\circ - \lambda$, $L' = 90^\circ - \lambda'$, et en remplaçant dans les formules précédentes l'angle A du triangle PAB, par sa valeur 180° — M, ou 180° — Z, en désignant l'azimut par Z, comme le font les géodésiens, les formules, dites des Ingénieurs géographes, se mettent sous

la forme

$$\Delta P = \frac{K \sin Z}{N \cos L' \sin 1''} - \frac{K^3 \sin Z}{6 N^3 \cos L' \sin 1''} \left[1 - \frac{\sin^2 Z}{\cos^2 L'} \right],$$

$$L' - L = - \frac{K \cos Z}{N \sin 1''} - \frac{K^2 \sin^2 Z \tang L}{2 N^2 \sin 1''} + \frac{K^3 \sin^2 Z \cos Z}{6 N^3 \sin 1''} [1 + 3 \tang^2 L],$$

$$Z' - Z = 180^\circ - \Delta P \sin \left(\frac{L' + L}{2} \right).$$

Dans le calcul des coordonnées des points des triangulations secondaires, on néglige d'ordinaire les termes du troisième ordre dans les formules qui donnent les différences de longitude et de latitude. Afin de se rendre compte de la valeur des termes négligés, nous donnons ici trois tableaux qui l'indiquent pour deux valeurs de longueur de côtés.

VALEURS DES TERMES DU TROISIÈME ORDRE.

1° *Calcul des latitudes.*

Latitudes.	K = 50km.		K = 105km.	
o ou o.....	0,024	0,072	0,18	0,54
30 » 33.....	0,03	0,09	0,36	1,08
60 » 66.....	0,24	0,72	0,83	2,49

2° *Calcul des longitudes.*

o ou o.....	0,02	0,06	0,18	0,54
30 » 33.....	0,09	0,27	0,66	1,98
60 » 66.....	0,36	1,08	2,85	8,55

3° *Calcul des azimuts.*

o ou o.....	0,00	0,00	0,00	0,00
30 » 33.....	0,03	0,09	0,33	0,99
60 » 66.....	0,05	0,15	0,42	1,26

Il y a lieu de remarquer, dans ce dernier tableau, que jusqu'à 50km le terme négligé est de l'ordre des erreurs d'observation dans les triangulations de second ordre. Mais, bien qu'exprimées aussi en secondes d'arc, ces corrections ne sont pas comparables aux corrections de longitude ou de latitude, car ces dernières sont comptées sur un cercle ayant pour rayon le rayon de la Terre,

tandis que la correction angulaire α, ayant pour sommet un point géodésique, ne peut exercer une influence qu'à 50^{km} ou 100^{km} au plus. C'est pour ces deux raisons que l'on peut dans les triangulations du deuxième ordre négliger les termes du troisième ordre dans le calcul de l'azimut. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que ce troisième ordre, si faible quand on n'envisage qu'un côté unique, peut, par accumulations successives, arriver à désorienter systématiquement une chaîne de triangles.

Réduction à l'ellipsoïde.

Reste à examiner les corrections à apporter aux coordonnées calculées sur la sphère tangente pour les ramener à l'ellipsoïde. Nous trouvons sur cette surface, au lieu de PAB, un triangle P′AB′ formé de deux grands arcs d'ellipse méridienne P′A, P′B′ et du petit côté géodésique AB′, B′ étant l'intersection de la surface de l'ellipsoïde et de la normale BN. Les verticales en P ou en P′, et en A, sont communes aux deux triangles ; elles se rencontrent au pied N de la grande normale en A ; mais la verticale en B′, qui est la normale B′N′ à l'ellipsoïde, va couper l'axe un peu plus haut, en N′.

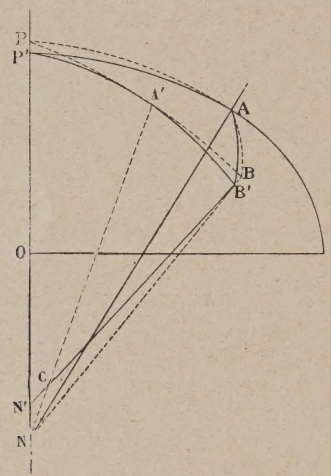
Le triangle sphérique PAB que nous lui avons substitué est donc situé sur une sphère ayant son centre en N et pour rayon la grande normale en A ou AN. Cette sphère est tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle de A ; elle est donc tangente à l'ellipsoïde en A′ aussi bien qu'en A (*fig.* 142).

Il serait impossible d'appliquer sur cette sphère le grand triangle ellipsoïdal P′AB′, car les arcs d'ellipse P′A, P′B′ sont loin d'être égaux aux arcs PA, PB. Néanmoins, ces deux triangles ont des parties communes. Ainsi les angles dièdres en P et en P′ sont égaux ; par suite, l'angle P que nous venons de déterminer sur la sphère n'a besoin d'aucune correction pour passer sur l'ellipsoïde. Il en est de même de l'angle en A, c'est-à-dire de l'azimut du point B ou B′. Nous verrons tout à l'heure que BB′ est négligeable, en sorte que l'on peut substituer le point B au point B′, donc la longueur du côté AB, à la longueur AB′ et que les angles dièdres en B et B′ ne diffèrent pas sensiblement. La seule différence entre ces triangles vient de ce que le point B′ n'a pas rigoureusement la même colatitude que B.

La différence est l'angle β de la vraie normale B′N′ avec le rayon BN de la sphère.

A la colatitude λ', que nous avons trouvée pour B, il faudra ajouter β pour avoir la colatitude du vrai sommet B′.

Fig. 142.



Le triangle B′CN, dans lequel CB′ se confond avec le rayon de courbure R calculé pour le point dont la latitude est $\frac{\lambda+\lambda'}{2}$, et où $CN = N - R$, nous donne

$$R \sin\beta = (N - R)\sin(\lambda' - \lambda),$$
$$R \cos\beta = N - z - (N - R)\cos(\lambda' - \lambda).$$

Par la première équation on a

$$\beta = \frac{N - R}{R}(\lambda' - \lambda),$$

ou, à très peu près,

$$\beta = \frac{e^2}{1 - e^2}(\lambda' - \lambda)\sin^2\lambda$$

ou, au second ordre près,

$$\beta = e^2(\lambda' - \lambda)\sin^2\lambda = -\,e^2(L - L')\cos^2 L.$$

La second relation donne

$$z = 2(N - R)\sin^2\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = 2Ne^2\sin^2\lambda\sin^2\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda).$$

En France, sur le parallèle moyen, ce petit écart pour $\lambda' - \lambda = 20'$ se réduit à quelques centimètres.

e^2	7,835 — 10	log N	0,001
Compl. log $(1 - e^2)$	0,003	log e^2	7,835 — 10
$\sin^2\lambda$	9,698 — 10	$\sin^2 10'$	4,927 — 10
$\lambda' - \lambda = 1200''$	3,079		1,763 — 10
log β	0,615	log a	6,805
	4″,12	log z	8,568 — 10
		z	0ᵐ,037

Ainsi le sommet B du triangle sphérique PAB est à 0ᵐ,037 au-dessus de la surface de l'ellipsoïde, et l'angle β qu'il faut ajouter au λ' sphérique est de 4″,12.

La différence de latitude des points A et B est donc donnée sur l'ellipsoïde par la formule suivante, en la limitant aux termes du second ordre en e^2, et où L″ est la latitude sur l'ellipsoïde, c'est-à-dire la latitude sphéroïdique de B :

$$L'' - L = -\left[\frac{K}{N\sin 1''}\cos Z + \frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2\sin 1''}\sin^2 Z\,\mathrm{tang}\,L\right](1 + e^2\cos^2 L).$$

CHAPITRE XXIV.

DÉTERMINATION DES ALTITUDES.

Il reste encore, pour terminer l'ensemble de la description géométrique d'une région, à déterminer les altitudes des stations géodésiques, c'est-à-dire les distances de ces points, comptées suivant la verticale, à une même surface de niveau de l'ellipsoïde de référence, laquelle sera la surface des mers, prolongée idéalement sous les continents.

Les différences d'altitude peuvent se déterminer par deux procédés (1) :

1° Le nivellement dit géodésique, où l'on détermine la différence d'altitude d'un point B par rapport à un point A, connaissant la distance zénithale du point B vu du point A et la distance AB ;

2° Le nivellement dit géométrique, ou de précision, qui s'exécute au moyen du niveau à bulle d'air et de mires.

Le premier donne par des observations convenablement agencées et pour des points distants d'une cinquantaine de kilomètres des résultats d'une exactitude de quelques décimètres ; c'est celui que l'on emploie pour l'établissement du réseau géodésique qui devra servir de point de départ aux opérations topographiques ; le second peut, avec les procédés employés aujourd'hui par les divers services des nivellements généraux des différents pays, donner des résultats dont l'incertitude pour des distances de 4 à 500^{km} ne dépasse pas quelques millimètres. C'est celui qu'emploient les divers services publics pour les opérations qui exigent des nivellements d'une grande précision, telles que les projets de lignes de chemins de fer, de canaux, de routes, etc.

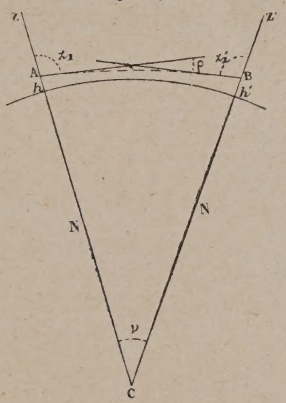
(1) En laissant de côté la détermination des altitudes à l'aide du baromètre.

Ce second procédé nécessite, bien entendu, beaucoup plus de temps et est plus coûteux que le premier.

Nivellement géodésique.

Ainsi que nous venons de le voir on détermine, dans le nivellement géodésique, le relief du sol par les cotes d'altitude de ses différents points, comptées à partir de la surface de l'ellipsoïde terrestre qui se confond avec la surface d'équilibre des mers, prolongée idéalement au-dessous des continents, du moins quand on fait abstraction des irrégularités locales (1).

Fig. 143.



A et B sont deux stations géodésiques situées aux altitudes h et h' au-dessous de l'ellipsoïde terrestre. L'arc compris entre les projections de ces points sur l'ellipsoïde est un côté de la triangulation ; sa longueur en mètres est donc parfaitement connue. Soient a cette longueur, N le rayon de la sphère locale tangente à l'ellipsoïde le long du parallèle de A, dont le centre est en C, ν l'angle au centre exprimé par $\frac{a}{N}$ en parties du rayon. Supposons que deux observateurs, placés en A et B aient mesuré *simultanément* les distances zénithales réciproques z_1, z'_1.

(1) Dans la détermination des altitudes, la Terre est supposée sphérique, donc toutes les surfaces du niveau sont parallèles et équidistantes en tous leurs points.

Le rayon de lumière allant de B en A est légèrement courbé par la réfraction atmosphérique, en sorte que le signal B est vu suivant la tangente en A à cette trajectoire. En désignant par ρ l'angle des tangentes extrêmes, le quadrilatère formé par ces deux tangentes et par les deux normales donne

$$z_1 + z'_1 + \rho = 180^\circ + \nu. \tag{1}$$

Ainsi, l'opération susdite ferait connaître immédiatement la réfraction géodésique ρ, indépendamment de toute théorie. La courbure de la trajectoire lumineuse étant très faible et son amplitude ν ne dépassant guère $\frac{40\,000^m}{6\,400\,000^m} = \frac{1}{160} = 20'$, il sera permis de confondre cette courbe avec une portion de son cercle osculateur dont le rayon est d'environ 8N. Dès lors, les petits angles formés, en A et B, par les tangentes à cet arc avec la corde AB, sont égaux à $\frac{1}{2}\rho$. Ces angles constituent la réfraction en A et en B; par conséquent, les distances zénithales vraies ZAB, Z'BA sont données par

$$z_1 + \frac{1}{2}\rho, \quad z'_1 + \frac{1}{2}\rho.$$

Dans le triangle ACB, on a

$$\frac{\sin\left(z_1 + \frac{1}{2}\rho\right)}{\sin\left(z'_1 + \frac{1}{2}\rho\right)} = \frac{N + h'}{N + h},$$

d'où, en tenant compte de la relation (1),

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_1 - z'_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(180^\circ + \nu)} = \frac{h' - h}{2N + h + h'},$$

ce qui peut s'écrire

$$h' - h = 2N\left[1 + \frac{h' + h}{2N}\right] \operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho \operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_1 - z'_3),$$

ou, en raison de la petitesse du terme $\frac{h' + h}{2N}$,

$$-2N \operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_1 - z'_1) \operatorname{tang}\frac{1}{2}\nu = h' - h, \tag{2}$$

et comme

$$2\,\mathrm{N}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,v = \mathrm{K},$$

$$h' - h = \mathrm{K}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,(z'_1 - z_1).$$

On obtient ainsi la différence de niveau des deux stations par un calcul indépendant de la réfraction géodésique ρ.

On a trouvé par des nivellements de ce genre, exécutés sur une grande échelle dans toutes les parties du monde. et au moyen de la relation (1), que la réfraction géodésique ρ est toujours égale à la même fraction $\frac{1}{8}$ de l'angle au centre v, quelles que soient la température et la pression.

La théorie conduit précisément au même résultat. En effet, l'équation différentielle de la réfraction étant, comme nous l'avons vu,

$$d\rho = -\frac{dl}{l}\,\mathrm{tang\,I},$$

si nous admettons la loi de Bouguer (fascicule I, p. 132), nous pourrons remplacer tang I par $\frac{r\,dv}{dr}$ et $\frac{dl}{l}$ par sa valeur déduite de cette loi supposée de l'atmosphère (1),

$$rl^m = \text{const.},$$

qui donne

$$\frac{dr}{r} + m\frac{dl}{l} = 0;$$

il viendra donc

$$d\rho = \frac{dv}{m},$$

et, en intégrant (la constante est nulle),

$$\rho = \frac{v}{m}.$$

Nous avons vu effectivement, dans la théorie de la réfraction astronomique (fascicule I, p. 134), que $m = 8$.

L'exposant m est donc aussi la constante de la réfraction géodésique.

---

(1) Toutes les lois admises pour le calcul de la réfraction astronomique conduisent au même résultat, non plus rigoureusement, mais approximativement.

Il y a lieu de remarquer que, pour pouvoir admettre que la réfraction était la même en A qu'en B, nous avons supposé la simultanéité de deux observations de distances zénithales. Dans la pratique des opérations géodésiques, on se borne à faire les opérations *réciproques* sans s'astreindre à la *simultanéité* qui exigerait un trop nombreux personnel d'observateurs et d'aides. Mais alors l'opération prête à la critique, car elle admet que la réfraction est restée la même quand on opérait en A et quand on opérait en B, ce qui n'est nullement prouvé.

L'étude du coefficient m montre, en effet, que sa valeur, et par suite celle de ρ, est très variable à des jours différents, et une étude analogue faite aux différentes heures de la journée donne les mêmes résultats. Mais on a constaté également une loi générale qui permet, dans une certaine mesure, de s'affranchir de la simultanéité. Vers le milieu du jour, la réfraction est minimum, sensiblement constante entre 11^h et 14^h, et égale, dans une région déterminée, à une certaine valeur moyenne. C'est donc dans cet intervalle de temps que l'on a soin de mesurer les distances zénithales, et l'on peut alors admettre que la réfraction est sensiblement la même en A et en B, bien que les observations soient faites à des jours différents.

Connaissant la valeur du coefficient de réfraction, on peut se contenter d'une seule observation de distance zénithale z_1 pour obtenir $h - h'$. C'est ce que l'on fait pour la détermination des altitudes des points secondaires. La réfraction $\frac{1}{2}\rho$ étant connue, on aurait, pour la distance zénithale vraie,

$$z_1 + \frac{1}{2}\rho = z_1 + \frac{v}{2m},$$

et le triangle précédent donnerait pour la seconde, non observée,

$$z_1 + \frac{1}{2}\rho - v = z_1 - \frac{2m-1}{2m}v.$$

Dès lors, la proportion

$$\frac{\sin\left(z_1 + \dfrac{v}{2m}\right)}{\sin\left(z_1 - \dfrac{2m-1}{2m}v\right)} = \frac{N + h'}{N + h}$$

devient

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho}{\operatorname{tang}\left(z_1-\frac{m-1}{2m}\rho\right)}=\frac{h'-h}{2N}$$

ou

$$h'-h=K\cot\left(z_1-\frac{m-1}{2m}\rho\right),$$

et, en négligeant des quantités du second ordre,

$$h'-h=K\cot z_1+\frac{m-1}{2m}\frac{K^2}{N}.$$

C'est la *formule topographique*.

Les géodésiens ont l'habitude de poser $\frac{1}{2}\rho=n\rho$, donc $\frac{1}{2m}=\rho$; la formule topographique prend alors la forme

$$h'-h=K\cot z_1+\left(\frac{1}{2}-n\right)\frac{K^2}{N}.$$

Le deuxième terme $\left(\frac{1}{2}-n\right)\frac{K^2}{N}$ renferme à la fois la correction de sphéricité de la Terre et celle de réfraction.

On obtient la valeur de n dans une région déterminée au moyen des distances zénithales obtenues par la méthode des distances zénithales réciproques; on a

$$\rho=180^\circ+\rho-(z_1+z_1'),$$

$$n\rho=\frac{180^\circ+\rho}{2}-\frac{z_1+z_1'}{2},$$

et comme $\rho=\frac{K}{N}$,

$$\frac{1}{2}-n=\frac{z_1+z_1'-180^\circ}{2K}\times N\sin 1'',$$

n sera donc déterminé avec d'autant plus de précision que K sera plus grand. Le coefficient n varie en France suivant les régions, de 0,06 à 0,08. En Algérie, les variations sont plus fortes; sur la côte, la valeur moyenne est de 0,068; dans la région centrale, de 0,048, et dans la région saharienne, de 0,059.

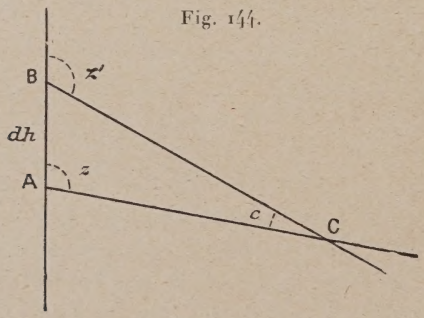
Remarque au sujet des variations diurnes des coefficients *m*.

Comme nous l'avons vu, la réfraction géodésique n'est constante que pour les heures moyennes du jour, de 8^h du matin à 4^h de l'après-midi. Le soir, elle croît de plus en plus à partir de 4^h et atteint son maximum dans la nuit. De même le matin, vers 6^h, elle atteint un second maximum. Ces phénomènes sont bien connus des géodésiens qui en profitent parfois pour voir des signaux trop peu élevés au-dessus du sol. Ils ne sont pas réciproquement visibles pendant le jour, mais le soir, la réfraction allant en croissant, il arrive un moment où le signal B s'élève au-dessus de l'horizon du point A et devient visible en cette station. Cela prouve que les astronomes ne sont pas fondés à assigner une loi invariable à la constitution de l'atmosphère, supposition qui n'a d'ailleurs d'inconvénient que pour le calcul des observations faites à plus de 80° du zénith. Mais ces faits montrent que les nivellements géodésiques devraient être, comme nous l'avons dit, exécutés par des distances zénithales *réciproques* et *simultanées*, si l'on voulait éviter en toute rigueur l'incertitude des réfractions géodésiques.

Réduction des distances zénithales au point visé.

Réduction des distances zénithales au point visé. — Nous

Fig. 144.



avons supposé implicitement que le centre du limbe du cercle des hauteurs du théodolite coïncidait en chaque station avec le point qui a été visé de la station conjuguée, ou se trouvait tout au moins

dans un plan horizontal passant par ce point. Il n'en est pas ainsi, en général; ce que l'on vise, c'est le sommet du signal; il faut donc apporter une petite correction aux distances zénithales pour les ramener aux conditions théoriques. Soient A le centre du limbe, B le plan supérieur du signal et C le point visé.

L'angle mesuré est z, si l'on avait observé en B il eût été z'; la correction est le petit angle c; soit $AB = dh$, on a

$$C'' = \frac{dh \sin z}{K \sin 1''}.$$

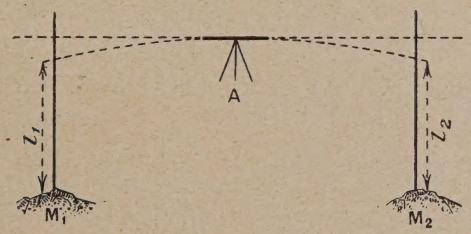
Enfin, pour avoir l'altitude du sol, il faut encore évidemment retrancher de l'altitude calculée la hauteur dT du centre du limbe du théodolite au-dessus du sol de la station.

Nivellement géométrique.

Ce nivellement s'exécute au moyen : 1° d'un niveau à lunette susceptible de toutes les rectifications nécessaires; 2° de mires sur lesquelles l'observateur peut lire directement la hauteur à laquelle correspond son rayon visuel.

Les portées, qui, dans le nivellement géodésique, atteignent de 20 à 60^{km}, sont ici de 60 à 75^{m}; ce procédé, s'il est susceptible d'une très haute précision, est donc, comme nous l'avons fait observer, beaucoup plus long et, par conséquent, plus coûteux que le nivellement géodésique.

Fig. 145.



Supposons le niveau en A, réglé de façon que son axe optique soit perpendiculaire à la verticale de la station. La formule topographique où z_1 sera égal à 90°

$$dH = K \cot z_1 + (0,5 - n)\frac{K^2}{N},$$

montre que, dans ce cas, tous les points B que rencontre l'axe optique, situés à une même distance K de A, quand on fait tourner la lunette au tour de l'axe vertical de l'instrument, ont même altitude, et cela indépendamment des effets de sphéricité et de réfraction. Le principe de l'exécution d'une portée dans le nivellement géométrique consiste à placer le niveau à égale distance des points M_1 et M_2 où sont placées deux mires graduées verticales. Si l_1 est la lecture sur la mire M_1, l_2 la lecture sur la mire M_2, on a, en appelant H_1 et H_2 les altitudes du sol en M_1 et M_2,

$$H_1 + l_1 = H_2 + l_2,$$

d'où

$$H_2 - H_1 = l_1 - l_2,$$

donc, sur une ligne nivelée allant du point d'altitude connue H_0 au point d'altitude H_n,

$$H_n - H_0 = \Sigma l_{ar} - \Sigma l_{av},$$

l_{ar} désignant les lectures de mire dites arrière, faites vers H_0 et l_{av} les lectures de mire dites avant, faites vers H_n.

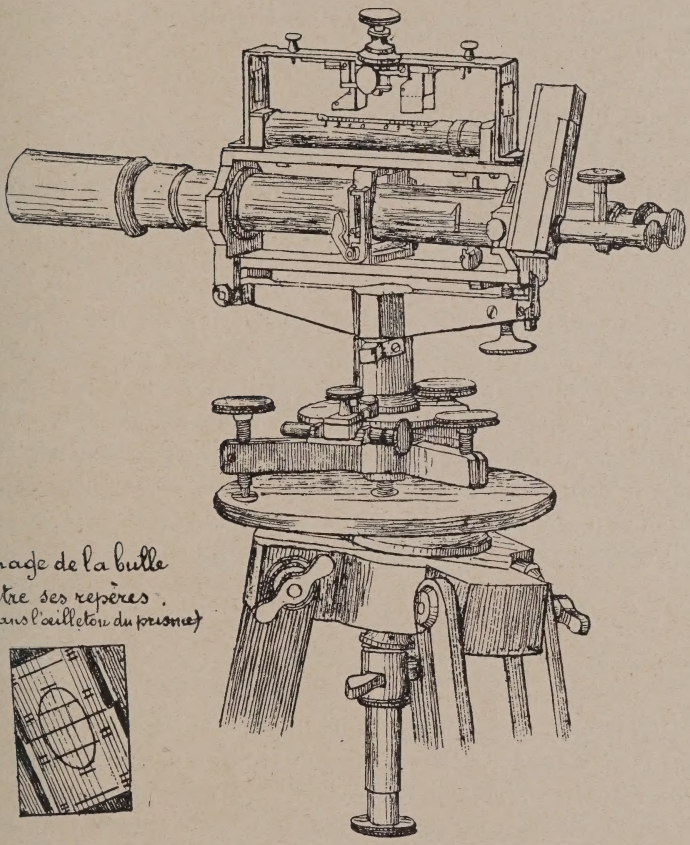
L'instrument actuellement en usage en France dans les opérations de nivellement de précision est le niveau à fiole indépendante et à prisme (*fig.* 146). Il se compose d'un axe supporté par un pied à trois vis calantes; d'un bâti qui tourne librement autour de l'axe et supporte la lunette par deux fourches; d'une lunette munie d'un réticule *fixe*, reposant sur les fourches du bâti par deux anneaux dont les surfaces extérieures sont des portions d'un même cylindre droit à base circulaire, l'axe du cylindre est l'axe géométrique de la lunette; enfin, d'un niveau à bulle d'air, ou nivelle, qui repose sur les anneaux de la lunette au moyen de deux jambes entaillées en forme de V.

Un perfectionnement important de l'instrument consiste dans un dispositif à prismes qui renvoie près de l'oculaire les images des deux extrémités de la bulle et permet à l'opérateur de toujours maintenir la bulle entre ses repères pendant l'opération, grâce à une disposition spéciale du bâti qui est formé de deux pièces, dont l'une peut tourner autour d'une charnière portée par le bâti principal, à l'aide d'une vis à pas très fin, dite vis de fin calage.

Le réticule étant fixe, on ne peut régler la collimation.

Le réglage de l'instrument consiste, après avoir réglé le niveau, à rendre l'axe *géométrique* de la lunette perpendiculaire à l'axe de rotation, puis à rendre ce dernier axe vertical. On corrige l'erreur résiduelle provenant d'un petit défaut de perpendicularité des deux

Fig. 146.



axes, en prenant la moyenne de deux lectures faites avant et après une rotation de 180° de la lunette autour de l'axe principal; si, de plus, on fait ces deux lectures en ayant soin de maintenir la bulle entre ses repères au moyen de la vis de fin calage, on élimine en même temps la petite erreur résiduelle provenant d'un défaut de verticalité de l'axe principal.

Enfin, comme le réticule est fixe, on corrigerait la non-coïncidence de l'axe optique, ou plutôt du plan optique passant par le fil niveleur horizontal du réticule et de l'axe géométrique, en prenant la moyenne de deux lectures faites avant et après retournement de la lunette sur ses colliers.

En résumé, on opère de la façon suivante : après avoir mis l'instrument en station, et assuré aussi exactement que possible la verticalité de l'axe au moyen de la nivelle supposée réglée, on fait une première lecture, la bulle étant entre ses repères, puis on fait tourner l'instrument de 180° autour de son axe principal, et l'on retourne la lunette sens dessus dessous et la nivelle bout pour bout. On fait alors une seconde lecture après avoir exactement remis la bulle entre ses repères, et l'on prend la moyenne des deux lectures.

Les mires sont d'un système dit à compensation, permettant à tout moment de connaître la longueur réelle de la mire, au moyen d'une disposition constituant une sorte de thermomètre formé par deux tiges, l'une de fer, et l'autre de laiton, assemblées entre elles et avec le bois de la mire à l'une de leurs extrémités à partir de laquelle fer, laiton et bois peuvent se dilater librement. L'étalonnage de l'ensemble a été fait de telle façon que le déplacement des divisions portées par la tige de fer par rapport à deux traits repères portés par le bois de la mire et la tige de laiton permet d'avoir d'une part la variation de longueur de la mire entre le moment de l'étalonnage et celui où l'on opère, et d'autre part l'état de la mire par rapport au mètre légal.

Historique. — La France a été le premier pays qui ait entrepris un nivellement géométrique de son territoire. Les méthodes pratiques que nous venons d'indiquer sont dues au conducteur des Ponts et Chaussées, Bourdaloué, qui les employa tout d'abord en 1847 au nivellement de l'Isthme de Suez. Ce nivellement montra que la différence de niveau d'environ 10^{m}, que l'on croyait exister entre la Méditerranée et la mer Rouge, et qui eût été un obstacle insurmontable à la construction du canal, n'existait pas, et que la différence de niveau entre les deux mers n'était que de quelques décimètres.

A son retour en France, Bourdaloué fit le nivellement du dépar-

tement du Cher, et on lui confia en 1857 le nivellement général de la France. Depuis lors, un Service chargé de ces opérations a été créé au Ministère des Travaux publics, et leur direction depuis 1895, confiée à M. l'Inspecteur général des mines Lallemand, membre de l'Institut, encore en fonction actuellement (1926).

Précision du nivellement géodésique comparée à celle du nivellement ordinaire.

La formule (2) peut s'écrire ainsi en division sexagésimale

$$k\,\frac{\frac{1}{2}(z'_1 - z_1)}{206265''} = h' - h,$$

d'où, en différentiant,

$$k\,\frac{d\frac{1}{2}(z'_1 - z_1)}{206265''} = d(h' - h).$$

Si l'erreur probable de z_1 et de z'_1 est de $1''$ sexagésimale ou de 3 secondes centésimales, celle de $z'_1 - z_1$ sera $1''\sqrt{2}$; en faisant $k = 40000^{m}$, on aura sensiblement

$$d(h' - h) = \pm\frac{0^{m},7}{5} = \pm 0^{m},14.$$

D'autre part, l'erreur probable d'un nivellement à petites portées, exécuté par les méthodes de M. Bourdaloue, dont on se sert aujourd'hui en tous pays, n'est que de $\pm 1^{mm}$ par kilomètre ou de $\pm 1^{mm} \times \sqrt{40} = 6^{mm},3$ pour la longueur d'un côté géodésique de 40^{km}. Les cotes d'altitude de la Carte de France sont dues néanmoins à l'application du premier système.

Il y a lieu ici de faire une remarque essentielle. Considérons deux surfaces de niveau $U_0 = 0$, $U_0 + \Delta U = 0$, pas très éloignées l'une de l'autre. Menons par le point A de la première la verticale AB de longueur Δn (*fig.* 147),

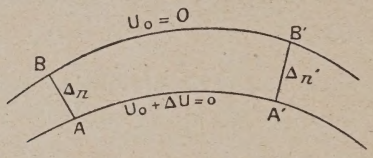
$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial n}\Delta n,$$

donc

$$\Delta U = g\,\Delta n,$$

puisque $\frac{\partial U}{\partial n}$ est l'intensité de la force en A, normale à la surface de niveau, c'est-à-dire l'intensité g de la pesanteur en ce point.

Fig. 147.



Menons une autre verticale en un autre point A'. Soit $\Delta n'$ sa longueur. On aura en A'

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial n'} \Delta n' = g' \Delta n'.$$

Or, comme nous le verrons, g' diffère de g, donc Δn de $\Delta n'$; la fraction de la verticale comprise entre les deux surfaces de niveau est de longueur variable.

Soit dès lors un nivellement géométrique allant de A en B' et supposons que l'on suive en premier lieu le chemin ABB', on trouvera une différence de niveau Δn, puisque BB' est une surface de niveau; si en second lieu on suit le chemin AA'B', on trouvera une différence de niveau $\Delta n'$, et l'on aura, par conséquent, dans la comparaison des deux fermetures une différence $\Delta n - \Delta n'$. Un nivellement géométrique peut donc être parfaitement précis tout en ayant une erreur apparente de fermeture.

Altitudes absolues des stations. Niveau de la mer. Médimarémètre. Dépression de l'horizon de la mer.

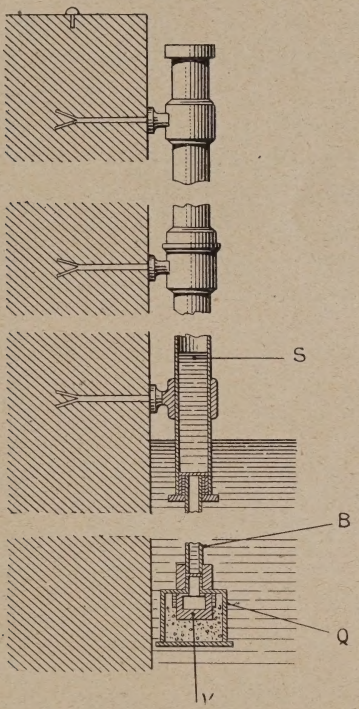
Les nivellements doivent être poussés jusqu'à la mer si l'on veut en conclure les altitudes absolues. Or, ce niveau est variable avec les marées, le vent, etc.; il faut donc déterminer le niveau moyen au point origine du nivellement.

On emploie, à cet effet, un appareil dû à M. l'Inspecteur général des mines Lallemand. Cet appareil, appelé médimarémètre (*fig.* 148), est basé sur le principe qu'une onde liquide qui se transmet à travers une paroi poreuse diminue d'amplitude et se

trouve retardée dans ses phases, sans que le niveau moyen éprouve du changement.

L'appareil se compose d'un tube étanche S en relation, par un tuyau B, avec un plongeur Q immergé au-dessous du niveau des

Fig. 148.



plus basses mers. Ce plongeur est partagé intérieurement en deux compartiments par une cloison poreuse V, et le compartiment inférieur rempli de sable ; l'enveloppe du plongeur est percée de trous pour l'accès de l'eau. La marée journalière se réduit dans l'appareil à une oscillation insignifiante.

On évalue la variation du niveau intérieur en plongeant chaque jour dans le tube une sonde sur laquelle est fixée une bande de papier sensibilisé au sulfate de fer et à la noix de galle ; la partie de la bande mouillée noircit, ce qui permet de lire facilement la cote de l'eau.

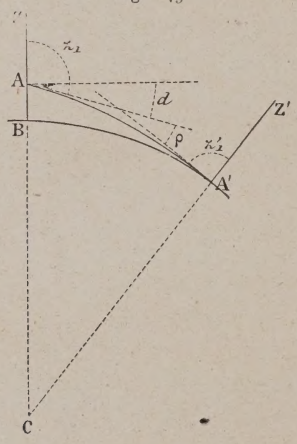
En reliant par des nivellements de précision les divers médimarémètres établis sur les côtes des différentes mers qui baignent la France, on a constaté que les niveaux moyens de ces mers étaient les mêmes à quelques centimètres près. En particulier, il n'y a qu'une différence insignifiante entre l'Océan et la Méditerranée, quoique la différence de salure des deux mers tendrait à faire supposer le contraire.

On a trouvé à l'étranger des résultats tout à fait analogues à ceux trouvés en France.

Les nivellements doivent être poussés jusqu'à la mer si l'on veut en conclure les altitudes absolues.

On pourrait aussi obtenir à la rigueur la hauteur h de la dernière station A, en déterminant ce que les marins appellent la dépression de l'horizon de la mer. Supposons que, de la dernière station A (*fig.* 149), on ait mesuré la distance zénithale z_1 de l'ho-

Fig. 149.



rizon de la mer. La trajectoire lumineuse AA′ sera tangente en A′ à la surface de la mer et l'on aura $z'_1 = 90^\circ$. Dès lors, l'équation (1) devient

$$2\,N \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho \operatorname{tang} \frac{1}{2} (z_1 - 90^\circ) = h;$$

mais cette formule ne saurait être utilisée parce qu'ici ρ est inconnu. Il faut avoir recours à l'équation générale de la trajectoire lumi-

neuse (1^er^ fasc., p. 127),

$$rl \sin \mathrm{I} = r_1 l_1 \sin z_1,$$

qui devient ici

$$rl \sin z_1 = r_1 l_1.$$

Éliminons l entre cette relation et la suivante (1^er^ fasc., p. 132),

$$r^{\frac{1}{m}} l = r_1^{\frac{1}{m}} l_1;$$

on aura

$$\sin z_1 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Remplaçons z_1 par $90^\circ + d$, d désignant la dépression, r par N et r_1 par $\mathrm{N} + h$, il viendra, en développant en série,

$$1 - \frac{1}{2} d^2 \ldots = 1 - \frac{m}{m-1} \frac{h}{\mathrm{N}} \ldots,$$

d'où, à très peu près,

$$d = \sqrt{\frac{2h}{\mathrm{N}} \frac{m-1}{m}},$$

formule où l'on fera $m = 8$. Elle donnera h si l'on a mesuré d ou z_1, et, inversement, elle donnera d si h est connu.

La dépression ainsi calculée ne compte en toute rigueur que pour les heures moyennes de la journée. Dans certains cas exceptionnels (mirage), elle peut prendre des valeurs très différentes et même devenir momentanément négative.

Ce procédé est donc loin de donner la précision nécessaire à la détermination des altitudes géodésiques ou géométriques.

CHAPITRE XXV.

DESCRIPTION ASTRONOMIQUE D'UN PAYS EN VOYAGE D'EXPLORATION. ÉLÉMENTS LOCAUX DE L'ELLIPSOÏDE TERRESTRE.

Dans les pays peu connus, et en voyage d'exploration, on peut très utilement procéder de la manière suivante. On se contente de déterminer astronomiquement les longitudes et les colatitudes des points essentiels. La figure de notre globe étant désormais assez bien connue, il est aisé de placer ces points sur une Carte de grande étendue et de s'en servir comme de points de repère pour la topographie locale. Celle-ci s'appuiera donc, non sur des triangles, comme dans les contrées géodésiques, mais sur un certain nombre de points de repère dont la distance et les azimuts respectifs pourront être calculés avec une grande exactitude.

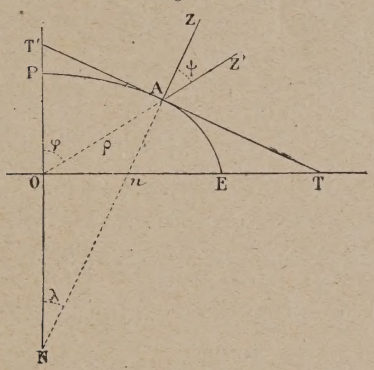
Cette méthode des coordonnées astronomiques est à recommander aux officiers qui parcourent des pays mal connus et qui tiennent à rapporter des éléments sérieux de ces pays. Pour cela, il suffit d'un sextant ou d'un petit théodolite (ou encore d'un astrolabe à prisme de petit modèle) et d'une bonne montre, et de déterminer astronomiquement les points essentiels de l'itinéraire suivi. Un appareil récepteur de T. S. F. permettrait de recevoir l'heure de Paris. L'emploi de la boussole et les distances évaluées par journées de marche, etc., et la détermination des azimuts de cimes remarquables, relevés de différentes stations, compléteraient le canevas. C'est ainsi, par exemple, que M. d'Abbadie est parvenu, à lui seul, à faire une carte excellente de l'Abyssinie. Ce procédé est actuellement employé pour dresser une Carte au $\frac{1}{500\,000}$ des régions sahariennes de l'Extrême-Sud algérien.

Calcul des éléments locaux de l'ellipsoïde terrestre : grande normale, distance au centre de la Terre, colatitude géodésique, etc.

Si l'on prend, pour coordonnées d'un point A donné par sa colatitude astronomique λ, les variables φ et ρ qui se rapportent au centre, on a, pour les formules de transformation,

$$x = \quad N \sin\lambda \quad = \rho \sin\varphi,$$
$$y = N(1 - e^2)\cos\lambda = \rho\cos\varphi,$$

Fig. 150.



d'où l'on tire ρ et φ, N étant $\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\lambda}}$.

On peut aussi en déduire

$$N e^2 \sin\lambda\cos\lambda = \rho\sin(\varphi - \lambda),$$
$$N - N e^2\cos^2\lambda = \frac{a^2}{N} = \rho\cos(\varphi - \lambda);$$

si, dans ces expressions, on fait par exemple

$$a = 6378200^m, \qquad e^2 = \frac{2}{297{,}0}$$

en prenant pour a et e ces valeurs de l'ellipsoïde, on trouve, à l'Observatoire de Paris, où $\lambda = 41°9'49''$,

$$\varphi - \lambda = 11'29'',68,$$

d'où

$$\varphi = 41°21'19'',$$

et

$$\log \rho = 9,9991735,$$
$$\rho = 6366083.$$

Résumé des formules pour l'ellipsoïde terrestre.

Grande normale AN	$N = a(1 - e^2 \cos^2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$
Rayon de courbure de l'ellipse méridienne	$R = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)$
Rayon de courbure dans l'azimut A	$N\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\sin^2\lambda \cos^2 A\right)^{-1}$
Petite normale An	$N(1 - e^2)$
Rayon du parallèle	$x = N \sin\lambda$
Ordonnée	$y = N(1 - e^2)\cos\lambda$
Distance du point A au centre	$\rho = a^2 N^{-1}\,\text{séc}(\varphi - \lambda)$
Relation entre φ et λ	$\text{tang}\,\varphi = \frac{1}{1 - e^2}\text{tang}\,\lambda$
Tangente AT′	$N\,\text{tang}\,\lambda$
Tangente AT	$N(1 - e^2)\cot\lambda$
Sous-tangente	$N(1 - e^2)\cos\lambda\cot\lambda$
Sous-normale	$N(1 - e^2)\sin\lambda$
On	$N e^2 \sin\lambda$
ON	$N e^2 \cos\lambda$
Nn	$N e^2$
Distance du centre à la tangente	$\rho\cos(\varphi - \lambda) = N - N e^2 \cos^2\lambda = \frac{a^2}{N}$
Quart de méridien	$Q = \frac{\pi a}{2}\left(1 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{64}\right)$
Rayon moyen (sphère d'égal volume)	$R = a\left(1 - \frac{e^2}{6}\right)$.

CHAPITRE XXVI.

IRREGULARITÉS DE LA SURFACE DE NIVEAU. ATTRACTIONS LOCALES. DÉVIATIONS DE LA VERTICALE.

Nous avons dit (Chap. XXI) que la conclusion à tirer des calculs de la détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre était que la surface mathématique du globe, celle des mers idéalement prolongée par des canaux par-dessous les continents, était bien réellement, *à très peu près*, un ellipsoïde de révolution.

Il faut se rendre compte de la restriction exprimée par ces mots : *à très peu près*. Dans l'exemple que nous avons donné, lequel comporte des mesures d'arcs, qui, bien que datant de la première moitié du XIX^e^ siècle (sauf celle de l'arc du Pérou qui est du XVIII^e^), ont été faites avec une grande précision, les mesures géodésiques les plus longues donnent s avec une incertitude de quelques toises seulement, soit 4 à 5^{T} environ; les amplitudes astronomiques sont mesurées à $\pm 0'',5$ près au maximum, ce qui équivaut à $15 \times 0,5 = 7,5$ d'incertitude sur s. En réunissant ces deux causes d'erreur, on trouve

$$\sqrt{5^2 \pm 7^{T},5} = \pm 9^{T}$$

pour l'erreur probable d'un arc mesuré, tandis que le calcul basé sur l'hypothèse de l'ellipsoïde de révolution laisse subsister des écarts qui s'élèvent parfois à 60^{T} et dont la valeur probable est de $\pm 23^{T},6$. La théorie conduit donc à des écarts que ne comporte pas, à première vue, la précision des mesures et ces mêmes remarques se retrouvent dans tous les calculs faits depuis, avec les arcs récemment mesurés. Examinons de plus près cette question en comparant dans notre exemple tous les segments de l'un des grands arcs, celui des Indes par exemple, avec les (s) correspondants. On trouve ainsi les nombres de la première colonne.

		Observation — Calcul.	
	T	T	"
Shahpur.....	0,0	+51,5	+3,4
Khimnana.....	— 58,9	— 7,4	—1,0
Kaliana.....	—113,4	—61,9	—4,1
Garinda.....	+ 2,8	+54,3	+3,6
Khamor.....	— 86,8	—31,3	—2,1
Kalianpur.....	— 33,9	+17,6	+1,2
Fikri.....	— 8,4	+43,1	+2,9
Walwari.....	—125,9	—74,4	—4,96
Damargidda.....	— 71,3	—19,8	—1,3
Darur.....	—120,5	—69,0	—4,6
Honur.....	— 5,9	+57,4	+3,8
Bangalore.....	— 96,9	—45,4	—3,0
Putchapoliam....	— 14,4	+37,1	+2,5
Kudankulam.....	+ 1,1	+50,4	+3,3

Cherchons les corrections les plus probables à appliquer aux écarts des divers sommets, de façon à rendre minimum la somme des carrés de ces corrections.

Si l'on désigne par x_1, x_2, x_3, ..., x_{14} les corrections relatives aux diverses stations, on aura les équations de condition

$$\begin{aligned}
x_1 - x_1 &= \quad 0{,}0,\\
x_2 - x_1 &= -\ 58{,}9,\\
x_3 - x_1 &= -113{,}4,\\
x_4 - x_1 &= +\ 2{,}8,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
x_{14} - x_1 &= +\ 1{,}1,
\end{aligned}$$

et pour la condition du minimum de la somme des carrés $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{14}^2$,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{14} = 0.$$

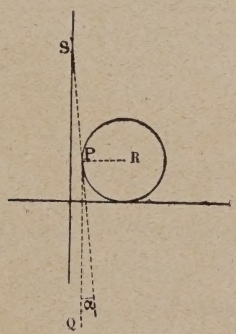
On en déduit $14x_1 = +720{,}6$, d'où $x_1 = +51^{\mathrm{T}},5$, et en ajoutant 51,5 à tous les nombres de la première colonne on obtient ceux de la deuxième. Mais, à cause de la grande précision des mesures géodésiques, on est amené à considérer les influences locales qui peuvent modifier la direction de la pesanteur, c'est-à-dire de la verticale, laquelle peut être déviée par l'attraction des masses terrestres avoisinantes. Alors, il devient naturel d'attribuer ces écarts aux colatitudes et non aux longueurs des arcs s : nous

les transformerons donc en secondes en les divisant par 15^{T}, et nous aurons ainsi les écarts en colatitude consignés dans la dernière colonne.

Attraction des montagnes.

Ces écarts sont bien supérieurs à ceux que l'on peut attendre de la précision des mesures de latitude, et proviennent certainement d'une cause étrangère aux observations. Ainsi que nous l'avons dit, on en retrouverait d'analogues pour l'arc russe ou l'arc anglo-français et, en général, dans toutes les mesures de ce genre. On en explique la cause par des variations brusques de densité dans l'épaisseur de l'écorce terrestre, telle que les dykes de matériaux très denses (basalte, serpentine) qui ont été injectés çà et là de bas en haut, à l'état liquide ou pâteux, dans des fissures plus ou moins larges, ou bien encore des saillies superficielles, collines ou montagnes isolées. Dans le voisinage immédiat de ces accidents le fil à plomb est légèrement dévié; il se produit une petite ondulation dans la surface de niveau qui n'en altère pas sensiblement la figure générale.

Fig. 151.



Pour fixer à ce sujet les idées, cherchons la déviation maximum α qu'une masse sphérique de rayon r et de densité δ imprimerait au fil à plomb, tout près de sa surface. En représentant les attractions de cette masse et du globe terrestre sur le point P par PR et PQ, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{PR}{PQ}.$$

Ces attractions étant proportionnelles aux masses et réciproques

aux carrés des distances aux centres de ces sphères, si l'on désigne par r, R, δ, Δ les rayons et leurs densités, on aura

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\frac{\frac{3}{4}\pi r^3 \delta}{r^2}}{\frac{\frac{3}{4}\pi R^3 \Delta}{R^2}} = \frac{r\delta}{R\Delta}.$$

Si la sphère m est formée des éléments de la croûte superficielle, δ sera à peu près égal à $\frac{1}{2}\Delta$; par conséquent

$$\alpha'' = \frac{r}{2R \sin 1''}.$$

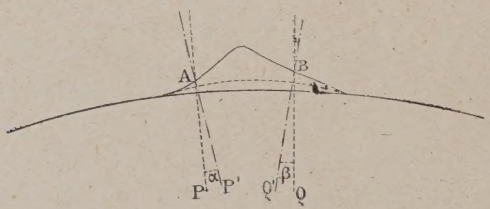
La déviation α sera d'une seconde sexagésimale, si $r = 64^m$ (1).

On a trouvé ainsi que les déviations occasionnées par certains massifs montagneux avaient les valeurs suivantes à 45^{km} environ de leur centre de gravité approximatif :

Massif du Hartz	27,3
Forêt Noire (sud)	9
Alpes de Souabe	14,4

(1) Bouguer, à qui cette remarque est due, en a conclu la possibilité de déterminer la densité moyenne Δ du globe terrestre en observant la déviation du fil à plomb occasionnée par le voisinage d'une montagne, et il a exécuté l'expérience au Pérou, sur le Chimboraço. Plus tard, Maskelyne a répété l'expérience de Bouguer sur une montagne d'Écosse, le Shehallien. En voici les détails. L'astronome

Fig. 152.



anglais commença par observer les colatitudes λ et λ' de deux stations A, B, au pied de la montagne, l'une au nord, l'autre au sud; puis il mesura, par une série de triangles contournant la montagne, l'arc de grand cercle a compris entre ces stations. L'excès de l'amplitude astronomique $\lambda' - \lambda$ de cet arc sur son amplitude

Déviations de la verticale.

Ainsi donc quand on compare les coordonnées longitude, latitude et azimut déterminées astronomiquement en divers points d'une chaîne méridienne ou, en général, d'une triangulation, aux coordonnées géodésiques de ces mêmes points, on constate qu'elles diffèrent d'ordinaire de quantités supérieures aux erreurs possibles d'observation.

Ces divergences proviennent des écarts qui existent entre les directions réelles de la verticale et les directions des normales à l'ellipsoïde de référence aux diverses stations. On les désigne, généralement, sous le nom de *déviations de la verticale*.

Mais en se reportant à la définition des coordonnées géodésiques, on sait que celles-ci dépendent des dimensions de l'ellipsoïde choisi comme ellipsoïde de référence et aussi du point de départ, où l'on admet que les coordonnées géodésiques et astronomiques sont confondues.

Soient M la station d'observation, MP une parallèle à l'axe du monde, MZ la verticale vraie du lieu, c'est-à-dire la normale au géoïde; MZ' la normale à l'ellipsoïde. ZMP est la colatitude astronomique, Z'MP la colatitude géodésique (*fig.* 153).

L'angle $ZMZ' = \theta$ représente la déviation de la verticale. Décrivons une sphère de rayon unité sur laquelle se trouve tracé le triangle sphérique PZZ' qui a pour angles $180^\circ - \alpha$; α' et P, α et α' étant les azimuts astronomique et géodésique de la direction ZZ', et P angle que font entre eux les deux méridiens géodésique et astronomique.

---

géodésique $206\,265'' \frac{a}{N}$ se trouva être de 11″; c'était la somme des déviations de sens contraire que la montagne produisait dans les verticales des deux stations. D'autre part, un habile géologue, Hutton, cuba la montagne au moyen d'une opération topographique et en détermina la densité moyenne 2,7. Pour calculer son attraction sur le fil à plomb, on la décomposa en prismes verticaux dont l'action fut calculée une à une; et finalement, de l'attraction totale comparée à celle du globe, on conclut 1,8 pour le rapport des densités. On trouva ainsi $\Delta = 4,5$. Les officiers anglais attachés aux opérations géodésiques du Royaume-Uni ont répété les mêmes mesures sur une colline d'Édimbourg, l'*Arthur Seat*, et ont obtenu $\Delta = 5,3$.

La deuxième analogie de Néper donne

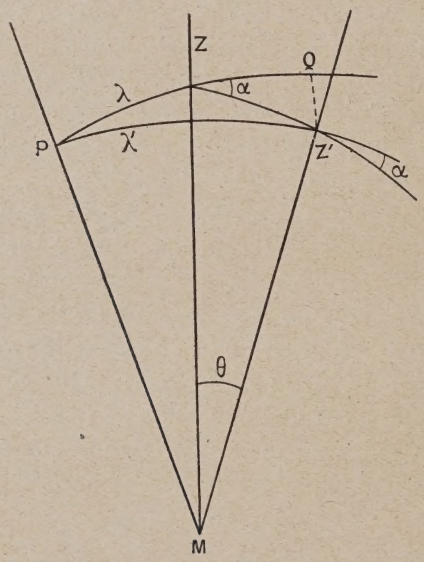
$$\operatorname{tang}\frac{\lambda'-\lambda}{2}=\frac{\cos\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\alpha'}{2}}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

d'où, au deuxième ordre près par rapport à θ,

$$\lambda'-\lambda=\theta\cos\alpha=\xi,$$

ξ étant la projection de la déviation sur le méridien ou encore la déviation ZQ dans le sens Nord-Sud.

Fig. 153.



La différence des longitudes astronomique et géodésique est le petit angle en P que font entre eux le méridien astronomique MPZ et le méridien géodésique MPZ'.

L'analogie des sinus donne

$$\sin P=\sin(L-L')=\sin\theta\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda'},$$

d'où avec la même approximation

$$(L-L')\sin\lambda=\theta\sin\alpha=\eta,$$

en désignant par η l'autre composante Z'Q de la déviation, c'est-à-dire la composante dans le sens Est-Ouest.

L'azimut astronomique de la direction ZZ' est α; son azimut géodésique α'; appliquons au triangle sphérique ZZ'P la première analogie de Néper, nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda+\lambda'}{2} = \frac{\sin\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}}{\sin\dfrac{\alpha-\alpha'}{2}}\operatorname{tang}\frac{0}{2},$$

qui limitée aux termes du premier ordre devient

$$(\alpha-\alpha')\operatorname{tang}\lambda = 0\sin\alpha = \eta.$$

En égalant ces deux valeurs de η, on obtient une relation importante entre les différences (Astronomie moins Géodésie) des longitudes et des azimuts :

$$(L-L')\cos\lambda - (\alpha'-\alpha) = 0,$$

c'est l'*équation de Laplace* réduite aux termes du premier ordre qui doit être satisfaite quelles que soient les déviations observées de la verticale. On voit que la déviation dans le sens Est-Ouest ne peut être déterminée par les observations d'azimut à l'équateur, où $\lambda = 90^\circ$, ou dans son voisinage, car alors les erreurs d'observation sur η sont multipliées par un facteur considérable; il faut dans ce cas pour déterminer η recourir aux observations plus longues et plus délicates des différences de longitude.

Correction des éléments de l'ellipsoïde.

Pour appliquer ces résultats, supposons que l'on ait déterminé, en un certain nombre de stations d'une chaîne méridienne, ou plus généralement en un certain nombre de points d'une triangulation, les coordonnées astronomiques, et que l'on dispose, par conséquent, en ces stations, des différences entre les coordonnées géodésiques et les coordonnées astronomiques.

Nous pourrons imaginer l'ensemble des normales au géoïde, qui sont les verticales astronomiques, et des normales à l'ellipsoïde de référence, qui sont les verticales géodésiques. En chaque point, les deux verticales diffèrent l'une de l'autre d'un petit angle. Ces

différences sont, d'ailleurs, relatives, car elles dépendent des dimensions de l'ellipsoïde de référence choisi, et ce choix est arbitraire; elles dépendent également de la station origine, où l'on admet que les coordonnées astronomiques et géodésiques coïncident, et le choix de cette station est également arbitraire.

Les déviations de la verticale, c'est-à-dire les différences entre les coordonnées géodésiques et astronomiques peuvent être utilisées de plusieurs manières.

Comme elles ne sont que relatives et que leurs valeurs varient avec les dimensions (a et e^2) admises pour l'ellipsoïde de référence, on peut chercher, par la méthode des moindres carrés, à apporter à ces deux éléments des corrections, de manière à atténuer le plus possible, en toutes les stations, les écarts entre les coordonnées astronomiques et les coordonnées géodésiques. Cela revient, en somme, à déterminer quel est l'ellipsoïde de référence qui se rapproche le plus du géoïde dans la région considérée.

De plus, comme les coordonnées géodésiques sont calculées en fonction des coordonnées observées à la station initiale, et que celles-ci peuvent être affectées d'erreurs d'observations et d'une déviation de la verticale, on tiendra compte également dans l'établissement des équations, des corrections à apporter aux éléments de départ.

Pour poser les équations du problème, on introduit, dans les formules générales du calcul des coordonnées géographiques, les petites variations produites sur la latitude, l'azimut ou la différence de longitude par :

1° de petites corrections apportées à a et e^2;
2° de petites corrections apportées aux valeurs observées de la latitude, de la longitude ou de l'azimut de départ.

A cet effet, on différentie les formules de calcul des coordonnées, supposées écrites avec assez de termes pour s'appliquer à un côté géodésique très long; cette différentiation est faite par rapport à da, de^2, $d\mathrm{L}_0$, $d\lambda_0$ et $d\alpha_0$, en posant

$$d\lambda_0 = \xi_0,$$
$$d\mathrm{L}_0 = \eta_0 \sec\lambda_0,$$
$$d\alpha_0 = \eta_0 \operatorname{tang}\lambda_0,$$

en fonction des deux composantes ξ_0 et η_0 inconnues et à déterminer de la déviation de la verticale au point de départ.

On aura ainsi en appelant ξ_n la correction à apporter à la différence des latitudes astronomique et géodésique, de façon à rendre cette différence minimum, en un point astronomique λ_n, L_n,

$$\xi_n = f(\lambda_0 + \xi_0, L_0 + \eta_0 \sec\lambda_0, \alpha_0 + \eta_0 \operatorname{tang}\lambda_0, a + da, e^2 + de^2) - f(\lambda_0, L_0, \alpha_0, a, e^2) + K$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\xi_n = K + A\xi_0 + B\eta_0 + C\,da + D\,de^2,$$

où K est l'écart numérique, constaté entre la latitude astronomique et la latitude géodésique calculée sur l'ellipsoïde (a, e^2).

De même, on aurait, en considérant soit l'écart des longitudes, soit l'écart des azimuts,

$$\eta_n = K' + A'\xi_0 + B'\eta_0 + C'\,da + D'\,de^2.$$

Si l'on suppose, pour simplifier, qu'aucun des points du réseau astrogéodésique n'est Laplacien, c'est-à-dire que l'azimut ou la différence de longitude ont été mesurés à l'exclusion l'un de l'autre, on a, en chaque sommet, les deux équations qui précèdent. Il s'agit alors de déterminer ξ_0, η_0, da et de^2 de façon à réduire au minimum l'expression

$$\Sigma\xi_n^2 + \Sigma\eta_n^2,$$

c'est-à-dire la somme des carrés des corrections.

Si un certain nombre de points sont Laplaciens, chacun d'eux fournit, en outre, une équation de condition, que l'on obtient en égalant les deux expressions de η_n relatives, l'une à l'azimut, l'autre à la différence de longitude

$$(L' - L)\cos\lambda - (\alpha' - \alpha) = m,$$

m étant l'erreur de fermeture due aux erreurs d'observation.

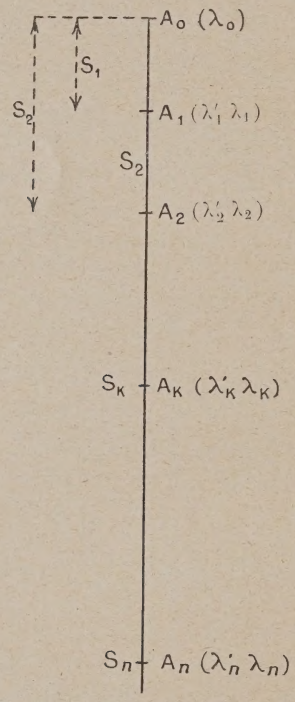
Comme dans tous les problèmes analogues, le calcul des résidus ξ_n et η_n, effectué après compensation, donnera en fin de compte les composantes définitives des déviations de la verticale, après compensation.

Cette méthode générale se simplifie beaucoup quand on utilise

un arc de méridien de grande longueur, fractionné par des stations de latitude, en un certain nombre de tronçons qui se suivent.

Soient alors A_0A_n l'arc de méridien, A_1, A_2, ... les stations intermédiaires où l'on a mesuré les coordonnées astronomiques. Soient λ_0 la latitude astronomique de départ, λ'_1, λ'_2, ... les colati-

Fig. 154.



tudes géodésiques, calculées sur l'ellipsoïde de référence, a_0 et e_0^2 le grand axe et l'excentricité de cet ellipsoïde, s_1, s_2, ..., s_k les longueurs d'arcs de méridiens A_0A_1, A_0A_2, ..., ε_1, ε_2, ... les différences de colatitudes, astronomie-géodésie.

Les colatitudes calculées sont données par une relation de la forme

$$\lambda'_k = f(s_k, \lambda_0, a_0, e_0^2).$$

Si au point A_k il y a une différence ε_k entre la colatitude observée et la colatitude calculée, c'est-à-dire une déviation de la verticale, celle-ci pourra provenir à la fois des erreurs d'observa-

tion et de la déviation de la verticale, et de petites erreurs sur les dimensions de l'ellipsoïde de référence. On aura donc, en admettant que les longueurs d'arc sont exactes, vu la précision des mesures géodésiques,

$$|\lambda_k - \lambda'_k| + x_k = f(s_k, \lambda_0 + x_0, a_0 + da, e_0^2 + de^2) - f(s_k, \lambda_0, a, e^2),$$

$$x_k = \varepsilon_k + \frac{\partial f}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial f}{\partial a_0} da_0 + \frac{\partial f}{\partial e^2} de^2.$$

Le résidu x_k étant la nouvelle valeur de la composante nord-sud de la déviation de la verticale, pouvant comprendre également une erreur commise dans l'observation de la colatitude.

En A_0, on a évidemment $x_0 = x_0$ et l'on aura à rendre minimum la somme des carrés des résidus

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_k^2 + \ldots + x_n^2.$$

Cette somme est une fonction de x_0, da et de^2,

$$F(x_0, da, de^2).$$

Il faudra donc résoudre les équations

$$\frac{dF}{dx_0} = 0, \qquad \frac{dF}{da} = 0, \qquad \frac{dF}{de^2} = 0,$$

et la résolution donnera les corrections da et de^2 à apporter aux éléments de l'ellipsoïde, x_0, correction à la latitude de départ, d'où l'on déduira ensuite les corrections x_1, x_2, ... aux autres latitudes observées.

La méthode générale que nous avons tout d'abord exposée est celle actuellement employée aux États-Unis, où elle a été introduite par le géodésien Hayford, sous le nom de méthode des aires, la seconde, dite méthode des arcs, a été celle du Bureau central de l'Association géodésique internationale.

Helmert a discuté ainsi le grand arc de méridien de 27°, 2 d'amplitude qui va de Saxaford dans les îles Shettland à Laghouat en Algérie, et dont la triangulation méridienne franchit la Méditerranée entre la Sierra Nevada en Espagne, et la chaîne du Filhaousen en Algérie (opérations faites par le général Perrier et le général Ibañez en 1879) et a trouvé pour l'aplatissement de l'ellipsoïde le long de cet arc $\frac{1}{281}$.

On peut aussi utiliser les déviations de la verticale pour dresser une carte en courbes de contour du géoïde rapporté à un ellipsoïde de comparaison, comme l'ont fait les géodésiens des États-Unis au Coast and Geodetic Survey.

On a fait aux États-Unis des déterminations astronomiques de latitude, de longitudes et d'azimuts en un grand nombre de points géodésiques. Les coordonnées géodésiques de ces points sont rapportées à l'ellipsoïde de Clarke de 1886, et à un point origine pris dans le Kansas, où l'on peut conjecturer que la déviation de la verticale est nulle.

On a utilisé graphiquement les déviations de la verticale constatées pour dresser des cartes donnant les lignes d'égale altitude de la surface du géoïde, c'est-à-dire de la surface équipotentielle qui coïncide avec la surface moyenne des mers au niveau du bord des océans, et qui est rapportée à l'ellipsoïde de Clarke de 1886, et au point initial indiqué plus haut.

Pour construire ces lignes de contour au moyen des composantes Nord-Sud et Est-Ouest des déviations de la verticale, on procède de la façon suivante.

On trace tout d'abord à une échelle déterminée le réseau des méridiens et des parallèles, au moyen duquel on place par leurs coordonnées les points où ont été faites les observations, et l'on inscrit en regard de chaque point les valeurs des déviations observées.

On joint ensuite par des lignes, les points d'égale déviation dans le sens du méridien, après avoir déterminé au préalable les points à cote ronde, en supposant que sur les droites qui joignent deux stations voisines la déviation varie d'une façon continue.

On détermine ensuite de la même manière les lignes d'égale déviation dans le sens du premier vertical.

Ceci fait, on trace sur la carte un quadrillage dont les côtés sont parallèles au méridien et au premier vertical, et dont les côtés du carroyage ont $20^{km},6$ à l'échelle du dessin. On a choisi cette longueur de $20^{km},6$ parce qu'une droite ayant une pente de 1 seconde sexagésimale s'élève de 1 décimètre sur $20^{km},6$ [1].

---

[1] $\left(\sin 1'' = \frac{1}{260\,090}\right)$.

De cette façon, la différence de niveau en mètres, des deux extrémités d'un côté du carroyage, sera sa pente en secondes divisée par dix.

Sur le milieu de chaque côté du réseau, et avec le signe convenable, on inscrit la différence de niveau des deux extrémités du carreau. Partant ensuite d'une cote attribuée arbitrairement à un point du système, on calcule les cotes des divers sommets des carrés et chaque cote est obtenue de trois façons : 1° par le point à l'Est, dans le premier vertical; 2° par le point au Sud-Est, en se servant d'abord d'une différence de niveau dans le premier vertical, puis d'une différence de niveau dans le sens du méridien; 3° enfin par le point au Nord-Est.

La cote finale choisie est la moyenne des trois précédentes.

On trace enfin les courbes de niveau à cotes rondes.

En rapprochant le tracé ainsi obtenu, de la carte topographique de la région étudiée, on a constaté que la ligne de contour 10^m du géoïde était approximativement parallèle à l'Atlantique depuis l'extrémité Nord du Maine jusqu'à la latitude 37°.

Le point le plus bas du géoïde tombe dans la partie Est du Lac Supérieur, région où se trouve également la profondeur maxima de ce lac, qui atteint plus de 100^m au-dessous du niveau de la mer.

Dans l'Illinois, la séparation entre l'Ohio et les Grands Lacs est nettement indiquée par la courbe 16^m du géoïde.

Le point d'altitude maxima du géoïde se trouve par 37°,5 de latitude et 81°,5 de longitude dans les Alleghanys, tout près de la position qu'il faudrait lui assigner, si les lignes de contour du géoïde correspondaient exactement aux accidents généraux topographiques.

Cependant, au sud du 33e parallèle et à l'ouest du 86e méridien, les lignes de contour du géoïde indiquent une pente escarpée vers le Sud qui ne correspond à rien d'analogue dans les mouvements topographiques.

Corrections à apporter aux angles des triangles géodésiques.

Nous avons dit (page 19) qu'il y avait lieu d'apporter aux angles mesurés dans les opérations géodésiques deux petites corrections, pour obtenir ces angles en toute rigueur. Nous possédons

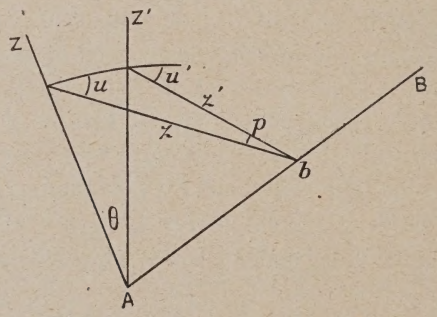
maintenant les éléments nécessaires à la détermination de ces corrections.

Dans les opérations géodésiques l'axe du théodolite, bien réglé, se confond avec la verticale vraie de la station. Les angles mesurés sont donc déterminés par les plans menés par la normale au géoïde et le point visé. Dans les calculs, par contre, les angles employés correspondent aux plans passant par la normale à l'ellipsoïde de référence, suivant laquelle on a projeté les points de station, et la projection des points visés, qui, en général, sont à une certaine altitude au-dessus de la surface de référence.

Il y a donc deux corrections à apporter aux angles employés dans les calculs, l'une correspondant à la déviation de la verticale à la station, c'est-à-dire à la non-coïncidence de la verticale vraie et de la normale au géoïde, et la seconde à ce que l'on a visé le point lui-même, au lieu de sa projection.

Soient AB la direction du point visé, Z le zénith astronomique, Z′ le zénith géodésique; z et z', u et u' les distances zénithales et les angles correspondants.

Fig. 155 *bis*.



La première correction est $u' - u$. Elle est analogue à la correction de convergence des méridiens, dans le calcul des coordonnées, donc, en appelant p le petit angle en b

$$c_1 = p \cos \frac{z + z'}{2} = p \cos z$$

du second ordre près. On a dans les mêmes conditions

$$p = \theta \frac{\sin u}{\sin z},$$

d'où

$$c_1 = 0 \sin u \cot z,$$

et comme on a

$$h = K \cot z + (0,5 - h)\frac{K^2}{R},$$

on peut également mettre la correction sous la forme

$$c_1 = 0 \sin u \left[\frac{h}{K} + (0,5 - h)\frac{K}{R}\right],$$

R étant le rayon moyen de la Terre.

Évaluons la seconde correction. Soit B le point visé, à l'altitude h au-dessus de la surface de référence. Les angles ayant subi déjà la première correction, nous pouvons supposer la station A sur cette surface, et la verticale vraie se confondant avec la normale à l'ellipsoïde. Le point B se projette en b suivant la normale en B, mais le plan de visée, qui passe par la normale en A, coupe l'ellipsoïde suivant Ab'. La correction est le petit angle c_2 que font entre eux les deux arcs d'ellipse Ab et Ab' (*fig.* 155 *bis*).

Soient Z l'azimut PAb de la visée, et ψ l'angle que font entre elles les deux droites Bb et Bb'.

On a

$$bb' = h \times \psi,$$

$$c_2 = \frac{bb' \sin Z}{K} = \frac{h\psi \sin Z}{K},$$

ψ est sensiblement la différence β des latitudes en b, sur la sphère et sur l'ellipsoïde, que nous avons trouvée (page 116) égale à

$$\beta = (\lambda' - \lambda)\, e^2 \sin^2 \lambda,$$

et comme nous avons (page 112)

$$\lambda' - \lambda = \frac{K \cos Z}{N},$$

nous aurons en définitive pour la correction c_2

$$c_2 = \frac{h e^2 \sin^2 \lambda \sin 2Z}{2N}.$$

Ces deux corrections ont une faible valeur, et l'on n'en tient ordinairement compte que dans les travaux de haute précision. Dans les opérations géodésiques ordinaires on les considère comme englobées dans les erreurs d'observation.

CHAPITRE XXVII.

DÉTERMINATION DE L'APLATISSEMENT PAR LES MESURES DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR.

La constante g de la pesanteur, en un lieu donné, est liée à la longueur l d'un pendule simple dont l'oscillation infiniment petite a pour durée t, dans le vide, par la relation d'Huyghens

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Si l'on prend pour unité la seconde sexagésimale de temps moyen, on a, en désignant encore par l la longueur du pendule simple qui bat cette seconde,

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad \text{d'où} \qquad g = \pi^2 l.$$

Il suffit donc de déterminer en un lieu donné la longueur de ce pendule, pour obtenir immédiatement la valeur locale de la pesanteur.

La formule de Clairaut, que nous ayons vue déjà (page 154 du 1er fascicule), donne, pour un lieu de colatitude λ et au niveau de la mer,

$$(1) \qquad l = l' + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) l' \cos^2 \lambda,$$

l' étant la longueur du pendule à l'équateur, μ l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre. En multipliant les deux membres par π^2, on a

$$(2) \qquad g = g' + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) g' \cos^2 \lambda,$$

g' ou $\pi^2 l'$ étant la pesanteur équatoriale, et l'on verra un peu plus

loin que $q = \frac{1}{288,36}$, on peut donc, si g et g' sont connus, déterminer μ par une seconde méthode, en utilisant les valeurs de g déterminées par l'observation en divers lieux du globe.

Si l'on peut, en effet, déterminer g à des stations de colatitudes connues λ, λ', λ'', ..., les diverses équations ainsi obtenues, traitées par la méthode des moindres carrés, donneront les valeurs des inconnues g' et μ.

Mais il faut bien remarquer que si, comme nous l'avons vu précédemment, un ensemble de mesures d'arcs de méridien, d'amplitude et de longueur connues, exécutées dans diverses régions, permet de déterminer les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, on ne pourra, par les déterminations de l'intensité de la pesanteur, obtenir que l'aplatissement μ, c'est-à-dire la figure de l'ellipsoïde de référence, mais non ses dimensions.

La première méthode est la méthode géométrique, la seconde la méthode dynamique.

Nous avons donné (page 254 du 1er fascicule), comme application de la méthode des moindres carrés, un exemple de détermination de l'aplatissement par la méthode dynamique.

Tout se ramène dans cette méthode à la détermination de la pesanteur en différents lieux au moyen du pendule.

En remarquant que, dans un même lieu, on a entre les longueurs l et l' de deux pendules et leurs durées d'oscillation t et t', la relation

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{l}{l'},$$

on voit que de la durée d'oscillation d'un pendule de longueur connue quelconque, on déduira facilement la longueur du pendule battant la seconde, et partant de là, l'intensité g de la pesanteur au lieu considéré.

Les observations consistent donc essentiellement en chaque station, dans la détermination de *deux* éléments, un temps t et une longueur l.

Historique des observations.

Les premiers observateurs ont cherché à se rapprocher le plus possible des conditions théoriques du pendule simple.

Le pendule se composait d'une boule de plomb ou de cuivre que l'on suspendait par un fil serré à sa partie supérieure entre les mâchoires d'une pince métallique, solidement fixée à un mur ou à un pilier. En face était installée l'horloge de comparaison.

L'observation de la durée des oscillations se faisait soit en agissant sur la longueur du fil jusqu'à rendre les oscillations du pendule d'expérience absolument isochrones avec celles du balancier de l'horloge de comparaison, soit en notant les instants où le pendule et le balancier passent ensemble devant un repère fixe; le pendule alors a gagné (ou perdu) une oscillation sur le balancier de l'horloge. Quant à la longueur du pendule, elle était prise à l'aide d'une règle de fer à coulisse, dont on appuyait une des extrémités contre la pince. C'était là une des plus graves causes d'erreurs de ces déterminations, l'incertitude sur la longueur pouvant atteindre deux ou trois dixièmes de millimètre.

Ce fut néanmoins sous cette forme que furent faites toutes les déterminations du XVIII^e^ siècle et du commencement du XIX^e^, jusques et y compris celles de Borda à l'Observatoire de Paris en 1791 et de Bessel à Kœnigsberg en 1817.

Outre les causes d'erreurs que comportait l'emploi du pendule simple, il avait le défaut de ne pas être transportable; c'était uniquement un instrument de laboratoire.

Mais un pendule transportable devenait forcément un pendule composé, car il ne pouvait consister qu'en une barre métallique oscillant autour d'un couteau faisant corps avec elle. Bernoulli a démontré que lorsqu'un solide oscille autour d'un axe fixe, il existe sur la perpendiculaire OG, abaissée du centre de gravité sur l'axe fixe, qu'elle rencontre en O, un autre point C, dont la position dépend de celle de O, qui oscille comme s'il était libre et si toute la masse du corps y était concentrée. Soit $OG = h$, $OC = h'$, on a $hh' = K^2$, K^2 étant le moment d'inertie du corps : $\frac{\int mr^2}{M}$, M étant sa masse totale, m la masse d'un élément du corps, r la distance de cet élément au centre de gravité.

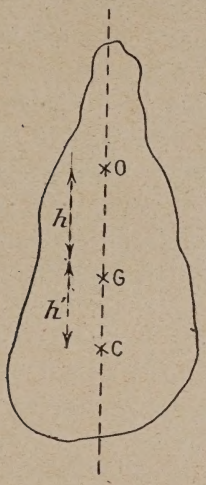
La formule d'Huyghens devient donc

$$t = \pi\sqrt{\frac{h+h'}{g}} = \pi\sqrt{\frac{h+\frac{K^2}{h}}{g}} = \pi\sqrt{\frac{h'+\frac{K^2}{h'}}{g}};$$

O et C sont réciproques, de telle sorte que si l'axe au lieu de passer par O passait par C, O deviendrait centre d'oscillation, la durée t restant rigoureusement la même (*fig.* 156).

Le mouvement du pendule composé s'exécute donc comme

Fig. 156.



celui d'un pendule simple de longueur $h + h'$ oscillant autour du point O. Il est donc possible de s'en servir pour déterminer g, à la condition de pouvoir déterminer $h + h'$.

La difficulté de déterminer le point C conduisit à la solution du pendule dit *invariable*, dont voici le principe.

La quantité $h + h'$ ne variera pas, si dans le transport de l'instrument aux diverses stations, il ne subit aucune déformation. On aura donc, aux diverses stations faites en des lieux de colatitudes λ, λ', λ'', ...,

$$t_\lambda^2 = \pi^2 \frac{h + h'}{g_\lambda},$$

$$t_{\lambda'}^2 = \pi^2 \frac{h + h'}{g_{\lambda'}},$$

$$t_{\lambda''} = \pi^2 \frac{h + h'}{g_{\lambda''}},$$

.....,

d'où l'on conclura

$$\frac{t_\lambda^2}{t_{\lambda'}^2} = \frac{g_{\lambda'}}{g_\lambda}, \qquad \frac{t_\lambda^2}{t_{\lambda''}^2} = \frac{g_{\lambda''}}{g_\lambda}, \qquad \ldots$$

On détermine ainsi les valeurs relatives de g, par rapport à la valeur de l'intensité de la pesanteur à la station fondamentale de colatitude λ.

Maupertuis fit une première application de ce principe dans l'expédition de Laponie ; après lui et au début du XIX^e^ siècle, c'est avec des pendules invariables que se firent les déterminations dans le monde entier, au cours des grands voyages de circumnavigation de cette époque.

Mais la méthode du pendule invariable implique la certitude de l'invariabilité du pendule employé et il est évident que l'on n'en a d'autre contrôle que l'identité du nombre des oscillations à la station fondamentale avant le départ et après le retour. En outre, et afin d'avoir une sorte de contrôle permanent, les observateurs faisaient leurs observations avec trois instruments, au moins, et l'on comparait à chaque station leurs durées d'oscillation.

Enfin, une dernière modification du pendule composé, basée sur l'application du principe dit « de la réversion », a conduit aux instruments et aux méthodes employées aujourd'hui encore pour la détermination des intensités absolues, en réservant le pendule invariable pour les déterminations relatives.

Le principe de la réversion résulte des observations suivantes. Le centre de suspension et le centre d'oscillation sont réciproques; si donc, en plus du couteau autour duquel oscille le pendule, on en place un second, parallèle au premier, en un autre point du corps, de telle façon que le centre de gravité soit dans le plan des deux arêtes, le second couteau passera par le point conjugué du centre de suspension lorsque les durées d'oscillation autour des deux couteaux seront devenues rigoureusement égales. Si l'instrument est organisé de façon à permettre la réalisation de cette condition par un procédé de réglage quelconque, la longueur du pendule simple synchrone sera égale à la distance des arêtes des deux couteaux, dimension facile à mesurer avec une grande précision au moyen d'un comparateur. Le pendule ainsi constitué est le *pendule réversible*.

De Prony, le premier, indiqua cette méthode en 1800, mais il ne réalisa pas son appareil et ne fit pas d'expériences. L'idée fut reprise en 1811, en Allemagne, par Bohnenberger, et un pendule réversible construit pour la première fois par l'anglais Kater.

Dans cet appareil, les couteaux étaient fixes et l'égalité des temps d'oscillation autour des deux axes réciproques était obtenue par le déplacement d'une masselotte qui faisait varier la position du centre de gravité. Ce procédé, assez imparfait, ne permettait pas de réaliser le réglage dans des conditions irréprochables.

Bohnenberger fit faire à la question un pas décisif en proposant de se servir d'un pendule muni de deux couteaux, réciproques mais dépourvus de moyen de réglage et en montrant qu'une combinaison convenable des expériences, jointe à la détermination du centre de gravité, permettait d'obtenir encore la longueur du pendule simple synchrone, à condition que les distances du centre de gravité à chacun des couteaux fussent inégales.

Supposons, en effet, que les deux couteaux passent rigoureusement l'un par le centre de suspension et l'autre par le centre d'oscillation; les durées d'oscillation autour des deux couteaux seraient alors égales, et l'on aurait $K^2 = hh'$.

Cette condition étant pratiquement irréalisable, on aura toujours quelque bien construit que soit l'instrument

$$K^2 = hh' \pm \varepsilon^2$$

puisque la distance h' du centre de gravité au second couteau différera de a distance théorique.

On aura donc, en faisant osciller le pendule autour du premier couteau,

$$T^2 = \frac{\pi^2\left(h + \frac{K^2}{h}\right)}{g} = \frac{\pi^2\left(h + h' \pm \frac{\varepsilon^2}{h}\right)}{g},$$

et en faisant osciller le même pendule autour du second couteau

$$T'^2 = \frac{\pi^2\left(h' + \frac{K^2}{h'}\right)}{g} = \frac{\pi^2\left(h + h' \pm \frac{\varepsilon^2}{h'}\right)}{g},$$

d'où, en multipliant la première équation par h, la seconde par h' et retranchant,

$$\tau^2 = \frac{hT^2 - h'T'^2}{h - h'} = \frac{\pi^2}{g}(h + h') = \frac{\pi^2}{g}\lambda,$$

λ étant la distance des deux arêtes des couteaux, mesurée au comparateur. On déterminera donc ainsi la durée théorique π^2 d'un

pendule de longueur λ, à condition que $h - h' \gtrsim 0$, condition qu'il est toujours facile de réaliser dans la construction de l'instrument.

Le pendule réversible tel que l'imagina Bohnenberger fut proposé par Bessel en 1849 et construit pour la première fois par Repsold de Hambourg. Perfectionné aussi à la suite des travaux de Peirce, de Plantamour, de Defforges et de Helmert, il est, comme nous l'avons dit, employé pour les déterminations absolues de la pesanteur.

Les opérations de détermination d'intensité absolue de la pesanteur sont parmi les plus délicates que l'on ait à faire en Géodésie. Le pendule d'expérience est forcément un pendule composé; pris dans son ensemble il n'est ni absolument rigide, ni tout à fait inextensible; les oscillations ont lieu dans un milieu dont la résistance ne peut pas être négligée, bien qu'on l'atténue dans une grande proportion en faisant osciller le pendule dans une cloche où l'on a fait le vide. Enfin la suspension du pendule joue un rôle considérable, soit par l'effet du roulement du couteau sur le plan de suspension, soit par l'influence du glissement qui s'exerce entre ce couteau et ce plan pendant le roulement, soit par l'entraînement du support qui cède sous l'effort du pendule et oscille synchroniquement avec lui.

Toutes ces causes troublantes produisent dans le mouvement du pendule des perturbations, dont chacune donne lieu à une correction, ou à un agencement particulier des observations pour en éliminer l'effet.

En outre, l'observateur aura à déterminer avec la plus grande précision la marche de l'horloge de comparaison, d'où il déduira, par la connaissance des nombres de battements effectués dans un temps déterminé, par le pendule et par le balancier de l'horloge, la valeur en temps d'une oscillation du pendule, au lieu considéré et par conséquent la valeur de g en ce lieu.

Les déterminations d'intensité absolue se font en un nombre assez restreint de stations, que l'on a cherché à répartir le plus convenablement possible sur la surface du globe. C'est en partant de ces stations fondamentales que l'on détermine en un grand nombre de lieux des intensités relatives, rapportées aux stations fondamentales, lesquelles ont été elles-mêmes rapportées à l'une

d'elles, celle de Potsdam, de façon que toutes les déterminations puissent être rigoureusement comparées entre elles.

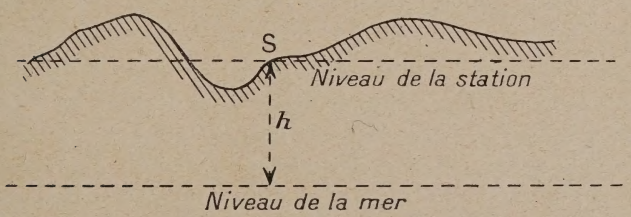
On dispose aujourd'hui d'un grand nombre de déterminations de l'intensité de la pesanteur, ramenées et rapportées à la station fondamentale de Potsdam et par conséquent comparables entre elles.

Mais avant de les utiliser pour la détermination par la méthode des moindres carrés des constantes de la formule de Clairaut et de l'aplatissement, ainsi que nous en avons donné un exemple (p. 254, t. I, 1er fasc.), il est nécessaire de faire subir aux valeurs observées certaines corrections.

Nous avons déterminé g, en une certaine station, sur la surface physique de la Terre, à une colatitude λ et une altitude h, ce qu'il nous faut avoir, c'est la valeur de g, réduite au niveau de la mer, c'est-à-dire sur la surface du géoïde, et corrigée des attractions produites par les masses extérieures à la surface du niveau passant par la station.

Il y a donc lieu de faire tout d'abord une première correction, dite correction topographique, relative à l'attraction des accidents topographiques voisins de la station, afin de ramener l'intensité g à la valeur qu'elle aurait si ces accidents n'existaient pas. Cette correction est toujours positive, les reliefs et les creux voisins de

Fig. 157.



la station causant toujours une diminution de l'intensité de la pesanteur en S. La correction topographique se calcule à l'aide de formules de cubatures très simples, connaissant la densité des roches qui composent le relief dans la région considérée. Au delà d'une dizaine de kilomètres, des masses même importantes ne produisent plus que des effets négligeables.

En second lieu, il faut ramener l'observation faite à l'altitude h,

à ce qu'elle serait si elle avait été faite à l'altitude zéro. Les valeurs de g sont inversement proportionnelles aux carrés des altitudes des stations. Si R est le rayon de la Terre et g_0 l'intensité de la pesanteur au niveau de la mer, on aura

$$\frac{g_0}{g} = \frac{(R+h)^2}{R^2}, \qquad g_0 = g\left(1+\frac{h}{R}\right)^2$$

ou avec une approximation largement suffisante

$$g_0 = g\left(1+\frac{2h}{R}\right);$$

cette correction est additive lorsque la station, ce qui est ordinairement le cas, est au-dessus du niveau de la mer. Mais elle ne tient compte que de l'altitude de la station, et nullement des masses qui sont interposées entre la station et la surface de niveau zéro.

On appelle, en général, cette correction d'altitude, correction de Faye, celui-ci admettant qu'elle est la seule à apporter aux valeurs observées.

Bouguer, qui, lors de la première mesure de l'arc du Pérou, au XVII^e siècle, avait déterminé l'intensité de la pesanteur au sommet du Pitchincha (4736^m d'altitude), a fait subir à la valeur observée une troisième correction.

La correction topographique a ramené g à ce qu'il serait sur une surface de niveau à l'altitude h; la correction d'altitude, ou de Faye, l'a ramené à ce qu'il serait sur la surface de niveau zéro, mais sans tenir aucun compte de l'attraction du massif continental entre la station et le niveau de la mer. Les masses de ce massif doivent cependant exercer une attraction en S, augmenter par conséquent la valeur de g, d'où la nécessité, selon Bouguer, d'une correction soustractive. On en trouve facilement l'expression.

Assimilons le massif continental sur lequel on a opéré à un cylindre plat de rayon X, de hauteur h et de densité δ. Son attraction s'ajoutant, à ce que l'on suppose, à celle du globe terrestre, fera paraître celle-ci trop forte et allongera un peu la longueur du pendule battant la seconde qu'on aurait obtenue sans sa présence. Pour la déterminer, décomposons ce cylindre en tranches d'épaisseur dh, et prenons dans une de ces tranches un

anneau circulaire de rayon x et de largeur dx. La masse de ce dernier sera $2\pi\delta x\,dx$, δ étant la densité; son potentiel par rapport à la station, c'est-à-dire la somme des masses élémentaires divisées respectivement par leur distance à la station, sera

$$\iint \frac{2\pi\,\delta x\,dx\,dh}{\sqrt{x^2+h^2}}.$$

L'intégrale prise de $x=0$ à $x=X$, ou

$$2\pi\delta\,dh\left(\sqrt{X^2+h^2}-h\right),$$

sera le potentiel de la tranche d'épaisseur dh et de rayon X, ou, comme X est très grand par rapport à h,

$$2\pi\delta\,dh(X-h).$$

L'attraction de cette tranche sur le pendule étant, à un facteur constant près, la différentielle de cette expression divisée par $-dh$, elle se réduira à $2\pi\delta\,dh$, et celle du cylindre entier de hauteur h sera $2\pi\delta h$. Son rapport à l'attraction du globe exprimée par $\frac{4}{3}\pi R^3\Delta$, au même facteur près, sera $\frac{3}{2}\frac{h}{R}\frac{\delta}{\Delta}$, ou simplement $\frac{3}{4}\frac{h}{R}$, puisque la densité des continents est à peu près la moitié de la densité moyenne Δ de la Terre.

D'après cela on aurait, pour la longueur du pendule battant la seconde, après correction topographique, réduction au niveau de la mer et correction de l'attraction de la masse du continent,

$$l_0 = l\left(1+\frac{2h}{R}-\frac{3}{4}\frac{h}{R}\right) = l\left(1+\frac{5}{4}\frac{h}{R}\right).$$

Nous verrons plus loin que la correction de Bouguer est discutable, tout au moins dans son intégralité. Quant à la correction de Faye elle n'est pas contestable.

En discutant et traitant par la méthode des moindres carrés 1603 déterminations de l'intensité de la pensanteur, M. Helmert, ancien directeur du Bureau central de l'Association géodésique internationale, a obtenu en 1901, en adoptant pour le grand axe la valeur de Bessel 6377379^m, d'où $q=\frac{1}{288,34}$, la formule suivante ramenée au système de Potsdam :

$$g_\lambda = 978^{cm},030(1+0,005302\cos^2\lambda-0,000007\cos^2 2\lambda)$$

et la valeur de l'aplatissement

$$\mu = \frac{1}{298,3}.$$

Les coefficients de la formule de Clairaut et la valeur de l'aplatissement subissent naturellement de petites variations suivant le nombre des stations où l'on a observé g, et les régions plus ou moins étendues auxquelles ces stations se rapportent. Mais ces variations sont faibles, ainsi qu'on peut en juger. M. Helmert a trouvé pour la valeur de l'aplatissement :

en 1889, par	122 stations réparties sur le monde entier	$\frac{1}{299,26 \pm 1,26}$
en 1901, par	1603 »	$\frac{1}{298,3}$
en 1915, par	410 »	$\frac{1}{296,7}$

M. Hayford, chef de la Division des Calculs au Coast and Geodatic Survey (États-Unis), et l'un des géodésiens qui se sont le plus occupé de ces questions, a trouvé (1912), par 122 stations des États-Unis,

$$\mu = \frac{1}{298,4 \pm 1,5}.$$

Faye, comme nous l'avons vu (1[er] fascicule, page 255), en traitant un petit nombre de stations, qui n'étaient pas à cette époque réduites au système de Potsdam, avait trouvé (1874)

$$\mu = \frac{1}{294 \pm 6}.$$

Détermination de l'intensité de la pesanteur en mer.

Toutes les valeurs de g que l'on a utilisées jusqu'ici ont été observées sur les continents, or la mer couvre les trois quarts du globe. On voit combien il serait important de pouvoir déterminer l'intensité de la pesanteur à la surface des mers.

Le pendule est ici inutilisable, car il exige un support fixe. Un savant suédois, M. Mohn, a indiqué une méthode de détermination de g, susceptible d'être employée à bord des navires par la comparaison en un lieu donné des indications du baromètre et de

l'hypsomètre, et un géodésien allemand, M. Hecker, l'a utilisée de 1901 à 1914 au cours d'expéditions dans l'Atlantique, le Pacifique et la mer Noire. Mais, en raison des difficultés que présentent les observations, la méthode paraît aujourd'hui abandonnée.

Son principe était le suivant :

Supposons que la pression exercée par l'atmosphère soit la même en un lieu de latitude φ et d'altitude h et en un autre lieu situé au milieu de la mer (altitude zéro) et à la latitude 45°, station où l'on admet une valeur de g normale. Les hauteurs barométriques exprimées en millimètres de mercure qui font équilibre à cette pression seront reliées aux valeurs de l'intensité de la pesanteur g_0^{45} et g_h^{φ} par la relation

$$B_0^{45} g_0^{45} = B_h^{\varphi} g_h^{\varphi},$$

d'où

$$\frac{g_0^{45} - g_h^{\varphi}}{g_0^{45}} = \frac{B_h^{\varphi} - B_0^{45}}{B_h^{\varphi}},$$

et par conséquent on pourra calculer $g_0^{45} - g_h^{\varphi}$, si l'on peut déterminer $B_h^{\varphi} - B_0^{45}$.

On obtient B_0^{45} au moyen d'une détermination hypsométrique, puisque les tables qui donnent la hauteur barométrique en fonction de la température d'ébullition de l'eau la donnent précisément pour l'altitude zéro et la latitude de 45°. Quant à B_h^{φ} on l'obtient directement au moyen du baromètre de Fortin.

M. Hecker employait pour ses déterminations six baromètres et six hypsomètres; deux des baromètres étaient enregistreurs. La difficulté des observations résidait dans la précision avec laquelle il fallait déterminer la température d'ébullition de l'eau de l'hypsomètre ($\frac{1}{100}$ de degré) et la hauteur barométrique ($\frac{1}{100}$ de millimètre) pour obtenir $g_0^{45} - g_h^{\varphi}$ avec une approximation de quelques unités de la cinquième décimale de g.

Depuis, un savant hollandais, M. Vening Meinesz, a imaginé une méthode, applicable en mer, à condition d'être employée à bord d'un sous-marin immergé, plus stable qu'un navire de surface. Un voyage récent (1923) exécuté par ce savant à bord d'un sous-marin de la marine hollandaise, du Helder à Sumatra, paraît avoir donné d'excellents résultats. Il a été fait usage de deux paires de pen-

dules invariables, avec enregistrement photographique des observations, la marche de l'horloge de comparaison était déterminée par la réception des signaux horaires de la Tour Eiffel.

On paraît donc être actuellement en possession d'une méthode qui élargira de la façon la plus complète les déterminations de l'aplatissement, et comblera la lacune que laisseront forcément toujours subsister les mesures d'arcs de méridien dont l'exécution est impossible à la surface des océans.

Anomalies de l'intensité de la pesanteur.

Nous avons donné (page 161), la formule de Helmert, l'une des plus usitées pour le calcul de l'intensité théorique de la pesanteur sur un ellipsoïde de référence normal.

Nous avons vu également que les valeurs de g, observées, devaient subir des corrections, et que les géodésiens n'étaient pas tous d'accord sur la nécessité de certaines de ces corrections. Les valeurs observées de g, réduites à l'ellipsoïde de référence, peuvent donc, pour une même station, différer suivant la méthode de réduction employée.

Quoi qu'il en soit, on peut comparer, à chaque station, la valeur de g, réduite suivant l'une des méthodes, à la valeur théorique calculée par l'une des formules théoriques, celle de Helmert, par exemple.

On constate que si les valeurs particulières de g pour une même station peuvent différer, dans certains cas, de quelques unités de la quatrième décimale, suivant la méthode employée pour la réduction des observations, par contre, quelle que soit cette méthode, les différences valeur observée-valeur calculée montrent partout une allure systématique des résidus.

On a été conduit ainsi à séparer les observations en trois groupes : les stations continentales, où la pesanteur d'ordinaire est en défaut, c'est-à-dire où la pesanteur calculée a une valeur plus faible que la pesanteur théorique; les stations côtières, où suivant les côtes considérées, la pesanteur est tantôt en défaut, tantôt en excès, ce dernier cas étant le plus fréquent; les stations des îles des océans où la pesanteur est toujours en excès.

TABLEAU

DES VALEURS DE LA PESANTEUR EN DIVERS LIEUX DU GLOBE.

---

g, pesanteur observée, ramenée au système de Potsdam.

γ_0, pesanteur théorique, déduite de la formule d'Helmert (1901).

g_0, valeur observée réduite au niveau de la mer (correction d'altitude).

g''_0, valeur observée réduite au niveau de la mer, diminuée des attractions topographiques et de l'attraction des masses comprises entre la surface terrestre et celle du géoïde.

$g''_0 - \gamma_0$, anomalie calculée en tenant compte de la correction d'altitude, de la correction topographique et de celle de Bouguer (hypothèse de Bouguer).

$g_0 - \gamma_0$, anomalie calculée en ne tenant compte que de la correction d'altitude (hypothèse de Faye).

STATIONS.	LATITUDE.	LONGITUDE.	ALTITUDE.	g.	$g''_0 - \gamma_0$.	$g_0 - \gamma_0$.
Stations continentales.						
	° ′	° ′	m			
Paris, Observatoire	48.50,2	2.20,3	61	980,943	— 6	0
Aurillac	44.56,8	2.26,6	640	980,483	— 3	+ 70
Chamonix	45.55	6.52	1050	980,323	—123	— 52
Greenwich	51.28,6	0. 0,0	48	981,197	+ 9	+ 14
Potsdam	52.22,9	13. 4	87	981,277	+ 20	+ 27
Vienne (Autriche)	48.12,7	16.22	183	980,860	— 9	+ 10
Turin	45. 4,1	7.41,8	233	980,549	— 25	— 1
Madrid	40.24,5	3.41,3	656	979,981	— 90	— 19
Biskra	34.50,9	5.43	137	979,617	— 73	— 58
Pulkowo	59.46,3	30.19,7	71	981,899	+ 18	+ 25
Tobolsk	58.11,4	68.15,3	56	981,697	— 62	— 55
Dehra Dun (Inde)	30.19,5	78. 3,3	683	979,069	—139	— 66
Moré (Inde)	33.15,7	77.52,0	4696	978,244	—433	+109
Mussoorée (Inde)	30.27,7	78. 4,4	2109	978,787	—141	+ 80
Montréal (Canada)	45.30,8	— 73.33	100?	980,672	+ 30	+ 41
Denver (États-Unis)	39,40,6	—104.57	1638	979,627	—163	— 5

STATIONS.	LATITUDE.	LONGITUDE.	ALTITUDE.	g.	$g''_0 - \gamma_0$.	$g_0 - \gamma_0$.
Stations côtières.						
	° ′	° ′	m			
Copenhague	55.41,2	12.34,7	14	981,559	0	+ 1
Bordeaux	44.50,4	— 0.34	17	980,550	— 48	— 47
Cadix	36.27,7	— 6.12,4	29	979,830	— 19	— 16
Alger	36.44,8	3. 3	213	979,905	+ 71	+ 91
Gibraltar	36. 8,2	— 5.21,3	6	979,793	— 33	— 32
Joal (Sénégambie)	14. 9,4	— 16 50	5?	978,379	-	+ 42
Bacou (Caucase)	40.22,0	49.50,3	7	980,078	—120	—119
Libreville (Afrique équat.)	0.22,3	9.27,2	2	977,999	— 30	— 30
New-York	40.45,1	— 73.59,6	20	980,186	— 43	— 41
Buenos-Ayres	—34.36,5	— 58.22,2	2	979,669	— 27	— 27
Montevideo	—34.54,5	— 56.12,9	4	979,772	+ 51	+ 51
Stations insulaires.						
Ajaccio	41.54,8	8.44	6	980,397	+ 62	+ 62
Palerme	38. 6,9	13.22,0	20	980,069	+ 75	+ 76
Catane	37.30,2	15. 4,7	43	980,065	+129	+133
Ile Lipari	38.28,6	14.57	9	980,143	+114	+115
Ceylan	6.55,9	79.50,8	15	978,160	+ 58	+ 60
Tokyo	35.42,6	139.46,0	18	979,801	+ 14	+ 16
Honolulu (îles Hawaï)	21.18,1	—157.51,8	11	978,922	+213	+214(†)
	18,6	—157.51,6	6	978,965	+254	+255(†)
Reykjavik (Islande)	64. 8,5	— 22. 0,3	39	982,273	+ 55	+ 60
Ile Caroline (Polynésie)	—10.00	—150.14	2	978,369	+184	+184
Maouna Kéa (îles Hawaï)	19.49,2	—155.28,8	3981	978,069	+277	+675

Ces résultats, en raison de leur généralité, de leur vérification constante et de la valeur des anomalies, bien supérieures aux erreurs d'observation des déterminations de g même les plus défectueuses, peuvent être aujourd'hui considérés comme certains.

Nous examinerons plus loin les hypothèses qui ont été faites pour expliquer ces anomalies (1).

(1) Ces valeurs sont extraites de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

CHAPITRE XXVIII [1].

HYPOTHÈSES EMISES SUR LA CONSTITUTION INTÉRIEURE DU GLOBE. ISOSTASIE.

Nous avons vu que si l'on considère un ellipsoïde de référence déterminé et que l'on compare aux diverses stations où l'on a fait des observations astronomiques et d'intensité de la pesanteur, la direction de la verticale et la valeur de g observées, avec leurs valeurs calculées à l'aide des formules résultant des données de l'ellipsoïde de référence adopté, on constate d'ordinaire de petites divergences.

De plus, quand on compare pour un ensemble de stations les déviations de la verticale aux anomalies de l'intensité de la pesanteur, on constate qu'elles sont en rapport très intime et paraissent donc pouvoir être dues aux mêmes causes. La grande anomalie positive, par exemple, que présente la pesanteur aux îles Sandwich, et qui atteint près de sept unités de la troisième décimale correspond à une composante nord-sud de la déviation de la verticale de 98″ environ due à l'attraction du Mauna-Kéa. Cette relation entre les deux phénomènes est constante et se constate partout où elle a pu être observée.

Mais d'autre part, quand, ainsi que l'ont fait les géodésiens américains, on calcule les attractions produites par les irrégularités visibles de la surface physique du globe, au-dessus du niveau des mers, c'est-à-dire au-dessus du géoïde, et que l'on compare les déviations de la verticale qui devraient en résulter, aux déviations

(1) On trouvera de plus amples développements dans la Notice sur l'Isostasie publiée dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1926, par le colonel Perrier, membre de l'Institut, correspondant du Bureau des Longitudes, à laquelle nous avons eu souvent recours.

observées, on remarque que ces dernières sont toujours inférieures aux premières. De même, dans la plupart des cas, et notamment dans la région de l'Himalaya où le fait a été constaté pour la première fois, les écarts entre la valeur déduite de l'intensité de la pesanteur observée, et la valeur théorique calculée par la formule de Clairaut, s'atténuent quand on n'introduit pas dans la correction le terme de Bouguer. Il semble donc qu'il s'établit une sorte de compensation dans la répartition des masses à l'extérieur et à l'intérieur du géoïde, dont l'effet est, sinon de faire disparaître entièrement les anomalies, mais tout au moins de les atténuer dans une certaine mesure.

On a fait à ce sujet plusieurs hypothèses, nous citerons celles de Pratt et d'Airy qui sont les principales, et datent du milieu du siècle dernier; et nous rappellerons celle de Faye, bien qu'elle soit abandonnée aujourd'hui.

Hypothèse de Pratt. — La discussion de l'arc mesuré par les géodésiens anglais aux Indes, et l'augmentation considérable des discordances, observation moins calcul, dans la discussion des valeurs de l'intensité de la pesanteur quand on tient compte du terme de Bouguer (1), avaient amené Pratt à chercher à évaluer l'attraction que devaient exercer sur le fil à plomb le massif de l'Himalaya, aux stations nord de l'arc Indien.

Les déviations ainsi calculées se montrèrent toutes beaucoup plus importantes que les déviations réellement observées; Pratt en conclut que d'une façon ou d'une autre l'attraction due à la masse de l'Himalaya dans la région considérée devait être compensée par un défaut de masse intérieur au géoïde.

Du reste, déjà au XVIII^e^ siècle, Bouguer, lors de l'expédition des Académiciens au Pérou pour la mesure de l'arc du méridien équatorial, avait déterminé l'attraction du massif du Chimborazo (6200^m^) dans la Cordillère des Andes, et comparé la déviation de la verticale, qui devait en résulter, à la valeur donnée par l'observation. Cette dernière s'étant trouvée notoirement plus faible que la première, il en avait conclu à une compensation, qu'il avait attribuée

(1) A la station de Moré (4696^m^), en particulier, l'anomalie obtenue en réduisant au niveau de la mer la valeur de g observée atteint $-0^{cm},433$, par la formule de Helmert.

soit à des cavités existant dans les couches de l'écorce terrestre sous-jacente, soit à un défaut de masse ou de densité dans ces mêmes couches.

Pratt suppose, comme l'avait soupçonné Bouguer, que l'excès de masse constitué par la chaîne de montagnes était compensé par un défaut de masse intérieur, et précisa son hypothèse en admettant que la quantité de matière contenue dans chaque cône, ayant son sommet au centre du globe et comme base un élément de la surface terrestre était constante, de telle sorte que la compensation était réalisée le long de chaque rayon de la Terre, ou encore que les reliefs continentaux avaient en quelque sorte aspiré leur matière des masses de l'écorce situées au-dessous d'eux.

L'hypothèse ainsi formulée est exagérée, et elle ne saurait, en tout cas, être réalisée que pour des sortes de troncs de cônes élémentaires ayant leur petite base sur une certaine nappe de niveau inférieure et leurs bases sur des éléments de quelques centaines de kilomètres carrés à la surface de la Terre.

C'est, en somme, cette idée qui a été reprise, comme nous le verrons dans la théorie actuelle de l'isostasie.

Hypothèse d'Airy. — A peu près à l'époque à laquelle Pratt émettait sa théorie, l'astronome anglais Airy communiquait la sienne à la Société Royale de Londres.

Pour lui, l'écorce terrestre se compose de blocs solides de densité δ, flottant sur un magma visqueux, de densité plus grande δ_1. On a évidemment (*fig.* 158), h' et h'' étant des hauteurs immergées et émergées du bloc,

$$(h' + h'')\delta = h'\delta_1,$$

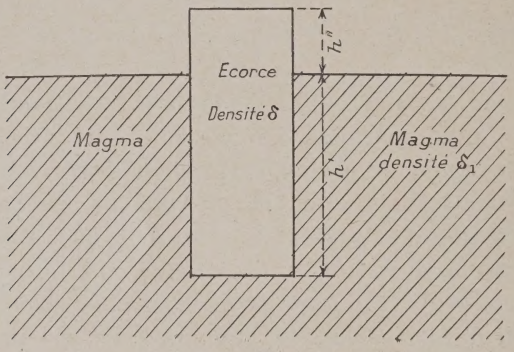
$$h' = \frac{\delta}{\delta_1 - \delta} h'',$$

et en admettant $\delta_1 = 2{,}96$ et $\delta = 2{,}68$, on a $h' = 9{,}6\ h''$. La hauteur immergée est 9,6 plus grande que la hauteur émergée.

Les blocs continentaux s'enfoncent donc davantage dans le magma que les blocs sous-marins. Les masses intérieures, au-dessous de la surface du géoïde, sont moins denses quoique plus épaisses que les masses situées sous les océans comme dans l'hypothèse de Pratt; les défauts de masses intérieures expliquent pourquoi les pesanteurs réduites, en appliquant la correction de

Bouguer qui ne tient compte d'aucune compensation, deviennent de ce fait trop faibles et donnent des résidus négatifs dans la comparaison observation-calcul.

Fig. 158.



Hypothèse de Faye. — La discussion des mesures d'arcs de méridien montre que la figure de l'ellipsoïde de révolution s'adapte à très peu près à la surface de notre globe, malgré les grandes irrégularités superficielles et l'inégale répartition des mers et des continents, dont la densité varie brusquement de 1 à 2,7.

Pour que cette figure première se soit ainsi conservée à travers les âges géologiques, il faut, dit Faye, que l'excès de densité des continents émergés soit compensé par quelque défaut de densité au-dessous, et que la légèreté spécifique des mers soit pareillement compensée par des couches inférieures de l'écorce plus denses.

Ce sont les mêmes considérations que celles qui ont conduit aux hypothèses de Pratt et d'Airy, et Faye arrive aux mêmes conclusions : défaut de masse sous les continents, excès de masse sous les mers.

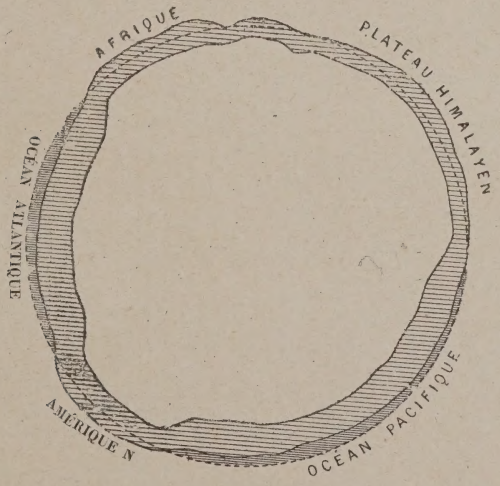
Mais l'explication qu'il en donne n'est plus en accord aujourd'hui avec les idées actuelles sur la constitution intérieure de la croûte terrestre.

Faye part de cette idée qu'au-dessous des mers, le refroidissement va plus vite et plus profondément que sous les continents. Les sondages exécutés en plein océan ont appris, en effet, qu'à 3700^{m} de profondeur la température de l'eau est d'environ 1°, tandis qu'à la même profondeur, sous un continent, la température

s'élèverait à 150°. La croûte terrestre doit donc avoir acquis dans le premier cas bien plus d'épaisseur que dans le second, conclusions en désaccord avec celles d'Airy. La figure ci-dessous représente l'hypothèse de Faye.

Elle figure une coupe du globe terrestre suivant le parallèle de 60°. La ligne pointillée marque le niveau des mers prolongé par-dessous les continents : c'est, dans son ensemble, une véritable circonférence. Au-dessus de cette ligne s'élèvent les continents d'Afrique, d'Asie et d'Amérique et en particulier le plateau de l'Himalaya. Au-dessous se trouvent les deux grands océans, dont la profondeur moyenne est comparable à la saillie des continents. Là l'épaisseur de la croûte terrestre solidifiée compense le défaut de densité des mers, tandis que, sous les continents, la minceur relative de la croûte compense la saillie des terres émergées. A mesure que le refroidissement progresse, cette différence d'épaisseur augmente; la croûte sous-marine exerce un léger excès

Fig. 159.



de pression sur le noyau liquide, et, comme cette pression se transmet en tous sens, elle tend à soulever de plus en plus l'écorce moins résistante et déjà fracturée des continents. Là serait aussi, suivant Faye, la cause des lents phénomènes géologiques qui ont

façonné et remanient encore aujourd'hui les couches supérieures de la Terre.

On conçoit donc que l'équilibre premier subsiste, que la surface mathématique du globe ne soit pas sensiblement altérée, non plus que la direction de l'axe de rotation. Mais aussi il n'y aura lieu de tenir compte des grandes inégalités de la couche superficielle, ni dans la mesure des latitudes, ni dans l'observation du pendule.

Isostasie.

C'est aux États-Unis qu'a pris réellement naissance la théorie actuelle de l'isostasie qui a scientifiquement consacré les idées précédentes de compensation des masses de l'écorce terrestre, et à cette œuvre se rattachent les noms de deux éminents géodésiens américains Hayford, chef de la Division des Calculs au Coast and Géodésic Survey (mort en 1915) et de son collaborateur et successeur William Bowie.

On fait aux États-Unis, au cours des opérations géodésiques de triangulations, de nombreuses déterminations astronomiques qui permettent d'obtenir en un grand nombre de stations les composantes de la déviation de la verticale.

On calcule également, par des méthodes très pratiques, les déviations théoriques que produiraient les masses visibles extérieures au géoïde, et l'on compare les résultats à ceux donnés directement par l'observation. Cette comparaison met en évidence le fait que nous avons déjà signalé, les déviations observées sont notablement inférieures aux déviations calculées. On conclut donc encore qu'il doit y avoir une compensation des masses extérieures par des irrégularités dans la distribution des masses à l'intérieur du géoïde.

Si l'on admet la fluidité originelle du globe, l'état d'équilibre primitif comportait forcément une distribution des masses par surfaces de niveau concentriques, de densités croissantes avec la profondeur. Mais, comme l'a déjà fait remarquer Faye, la solidification de la croûte a modifié cet état, les couches en se solidifiant se sont fracturées, plissées, soulevées sous toutes les actions géologiques. L'équilibre primitif ne subsiste plus tout au moins jusqu'à une certaine profondeur.

On admet donc, dans la théorie de l'isostasie, qu'à l'intérieur du

géoïde le globe terrestre est divisé en deux parties par une certaine surface à laquelle on a donné le nom de surface de compensation, située à une certaine profondeur, dite profondeur de compensation. A l'intérieur de cette surface l'équilibre est parfait et dans les conditions primitives. A l'extérieur l'équilibre est incomplètement réalisé, la densité des matériaux indépendante de leur profondeur et de la surface de niveau sur laquelle ils se trouvent. Mais comme la surface de compensation est par hypothèse en équilibre, elle doit supporter en tous ses points la même pression de la part des matériaux qui lui sont extérieurs. Donc dans un même tronc de cône élémentaire, à axe vertical, à l'extérieur de la surface de compensation, tout excès de masse doit être compensé par un défaut et inversement, d'où il suit qu'aux reliefs du sol doivent correspondre des matériaux sous-jacents de plus faible densité et inversement pour les profondeurs des mers.

L'isostasie est l'état d'équilibre imparfait des matériaux extérieurs à la surface de compensation, mais qui tendent cependant à revenir à l'équilibre parfait et à se déplacer, pour arriver dans la suite des âges géologiques et par l'effet de la pesanteur de l'équilibre isostatique actuel imparfait, à l'équilibre hydrostatique parfait.

Les géodésiens américains Hayford et Bowie ont cherché à contrôler leurs hypothèses. Dans ce but ils ont calculé, suivant la méthode que nous avons indiquée au Chapitre XXVI, les $d\lambda_0$, $d\mu_0$, $d\alpha_0$, da et de^2, en envisageant les différents cas qui correspondent aux hypothèses que l'on peut faire sur l'attraction exercée par les masses terrestres. Si l'on admet une compensation parfaite, les déviations constatées ne doivent provenir que des erreurs d'observation commises sur les éléments astronomiques de départ et sur les dimensions de l'ellipsoïde de référence, les termes constants des équations de condition que nous avons posées sont les déviations apparentes constatées, c'est l'hypothèse de Faye. Si l'on admet la rigidité absolue de la Terre, les termes constants précédents doivent être corrigés des déviations produites par les masses comprises entre la surface physique de la Terre et le géoïde, c'est l'hypothèse de Bouguer. Enfin, si l'on admet la théorie de l'isostasie, il faudra faire des hypothèses sur la profondeur à laquelle se trouve la surface de compensation. On calcule alors

dans chaque cas les déviations isostasiques correspondantes et l'on corrige de leur valeur les termes constants des équations de condition. L'ensemble de ces équations, traité par la méthode des moindres carrés, donnera dans chaque cas des valeurs différentes des inconnues; ces valeurs introduites dans les équations feront connaître les résidus correspondant à chacun des cas; la solution qui donnera la plus petite somme des carrés des résidus sera considérée, en définitive, comme celle qui s'approche le plus de la vérité.

Les résultats obtenus en 1910 ont été les suivants :

	Somme des carrés des résidus.
Hypothèse de Faye	18889
Hypothèse de Bouguer	107385

Hypothèse de l'isostasie :

Profondeur de la surface de compensation.	Somme des carrés des résidus.
km	
162,2	10297
120,9	10063
113,7	10077

L'hypothèse de l'isostasie donne donc des sommes de carrés des résidus notoirement inférieures aux autres hypothèses.

Les valeurs du grand axe et de l'aplatissement, résultant de chacune des solutions, sont respectivement :

Hypothèse de Faye .. $a = 6378062^{m}$ $\mu = \frac{1}{298,2}$

Hypothèse de Bouguer $a = 6383042^{m}$ $\mu = \frac{1}{255,1}$

Isostasie.

Profondeur : $162,2^{km}$ ... $a = 6378493^{m}$ $\mu = \frac{1}{296,3}$

» : 120,9 .. 6378388 $\mu = \frac{1}{297,0}$

» : 113,7 .. 6378370 $\mu = \frac{1}{297,1}$

Ultérieurement, en 1912, MM. Hayford et Bowie ont envisagé le même problème en se servant des résultats obtenus dans les

mesures d'intensité de la pesanteur, et de la formule de Helmert, en y introduisant les intensités réduites au niveau de la mer suivant les hypothèses de Faye, de Bouguer et de l'isostasie.

Les résultats ont confirmé complètement ceux obtenus par la considération des déviations de la verticale.

Enfin, une discussion d'ensemble des résultats déduits de l'intensité de la pesanteur a conduit Bowie à adopter en définitive, comme profondeur de la surface de compensation, 96^{km} environ, et comme aplatissement $\mu = \frac{1}{297,4}$.

L'accord de ces résultats : 122^{km} pour la profondeur de compensation par les déviations de la verticale, 96^{km} par les intensités de la pesanteur, et respectivement pour l'aplatissement,

$$\mu = \frac{1}{297,0 \pm 0,5} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{297,4 \pm 1,0},$$

est une preuve de la légitimité des conceptions du Coast and Geodesic Survey.

Celles-ci prennent aujourd'hui un intérêt de plus en plus grand et le problème n'intéresse plus seulement la géodésie, mais aussi la géologie et toute la physique du globe.

On voit, par cela, toute l'importance de la géodésie dont le cadre est actuellement tellement élargi, qu'il embrasse toutes les études relatives, non seulement à la description géométrique de notre globe, mais aussi à sa constitution et à la disposition des masses qui le composent.

Attraction de la Terre sur un point extérieur.

On a besoin, en Astronomie, de connaître, non plus g, mais l'attraction de la Terre sur un point extérieur.

La pesanteur, en un lieu donné, est la résultante de l'attraction du globe et de la force centrifuge née de la rotation diurne. En un lieu dont les coordonnées, dans le plan du méridien, sont N et λ ou x et y, la composante verticale de cette force est

$$\frac{4\pi^2}{T^2} x \sin\lambda,$$

T étant la durée de la rotation, et comme

$$x = N \sin\lambda = \frac{a \sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}},$$

on aura, pour l'attraction du globe (pesanteur + composante de la force centrifuge) au point considéré,

$$g + \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a \sin^2\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}},$$

g étant calculé par l'une des formules théoriques, celle de Helmert, par exemple.

On démontre, en Mécanique, que l'attraction du globe sur un point extérieur répond à celle qu'il exerce sur un point de la surface dont la colatitude a pour cosinus carré $\frac{1}{3}$. Faisons donc, dans la formule ci-dessous,

$$\cos^2\lambda = \frac{1}{3}, \qquad \sin^2\lambda = \frac{2}{3}, \qquad e^2 = 0,006839\,5,$$

nous aurons, pour cette attraction,

$$9^m,8204.$$

Le carré du rayon terrestre correspondant est

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \frac{\sin^2\lambda + (1 - e^2)^2 \cos^2\lambda}{1 - e^2 \cos^2\lambda}.$$

Cette formule donne, pour $\cos^2\lambda = \frac{1}{3}$,

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 0,99773.$$

L'attraction du globe terrestre variant en raison inverse du carré de la distance, on aura, à la distance quelconque D,

$$9^m,8204 \frac{\rho^2}{D^2} = 9^m,7981 \frac{a^2}{D^2}.$$

Quant à la force centrifuge équatoriale $\frac{4\pi^2}{T^2} a$ et au rapport q de cette force à la pesanteur équatoriale qui figure dans la formule de Clairaut, en voici le calcul; la vitesse de rotation de la Terre

étant de 1 tour par 86400^s sidérales ou par 86164^s de temps moyen :

$\log 4$	0,60626
$\log \pi^2$	0,99430
$\log a$	6,80471
$C^t \log T^2$	0,12935 — 10
log force centrif. équat.	8,53042 — 10
log pesant, équat	0,99037
$\log q$	7,54005 — 10
C^t	2,45994

$$q = \frac{1}{288,364}.$$

LIVRE SIXIÈME.

GÉOGRAPHIE.

La Géographie mathématique se compose de deux parties : l'une, qui dépend de l'Astronomie, a pour but de déterminer, dans tous les points importants du globe, les coordonnées terrestres de colatitude et de longitude, ainsi que l'orientation, afin de rattacher à des bases certaines les renseignements de toute provenance qu'elle utilise pour la description du globe ; l'autre, qui dépend de la Géométrie pure, a pour but de reporter sur des Cartes générales ou partielles la configuration des pays, des continents et des mers.

La première partie a déjà été traitée amplement dans le cours de ce volume ; nous exposerons ici rapidement la seconde.

La sphère n'est pas une surface développable ; on ne peut donc la représenter en tout ou en partie sur un plan qu'en lui faisant subir quelque déformation. Il y a une infinité de systèmes de Cartes ; tous ont leurs déformations particulières : les uns altèrent les longueurs et conservent les angles ; les autres altèrent les angles et les longueurs et conservent les surfaces, etc. Nous allons, sans insister sur les considérations analytiques, passer en revue les principaux systèmes de Cartes par projection ou par développement, en insistant sur les déformations qui leur sont propres. Disons seulement, au point de vue historique, que les projections sont dues à Hipparque, et que les premières Cartes par développement viennent de Ptolémée.

CHAPITRE XXIX.

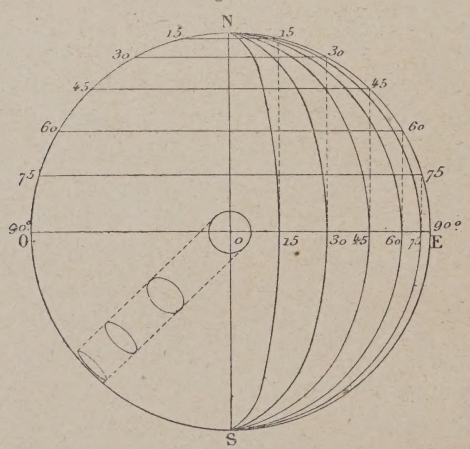
CARTES PAR PROJECTION.

Projection orthographique.

C'est la projection ordinaire d'un hémisphère sur le grand cercle qui lui sert de base. Prenons pour base le plan d'un méridien, comme dans la figure ci-dessous. Les autres méridiens seront représentés par des ellipses ayant pour axe commun la ligne NS, c'est-à-dire la ligne des pôles. Les parallèles de la sphère seront représentés par des droites perpendiculaires à cet axe.

Construction du canevas. — Rabattons le demi-cercle équatorial OE sur le plan de la Carte en ONE, et divisons-le de 15°

Fig. 160.



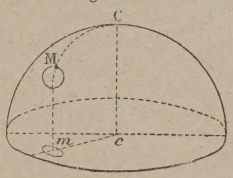
en 15° à partir du point N. Par les points de division, menons des perpendiculaires sur OE; nous aurons ainsi la graduation de

l'équateur en longitude, et en même temps celle du cercle méridien NES en colatitude. Par les points de division de l'équateur, faisons passer des ellipses ayant pour grand axe commun NS ; par ceux du méridien NE, menons des parallèles à OE. Nous aurons la représentation d'un réseau de méridiens et de parallèles de la sphère distribués de 15° en 15°.

Cette projection est usitée en Astronomie pour représenter les astres à diamètre sensible, tels que le Soleil, la Lune, les planètes. C'est, en effet, à très peu près, sous la forme d'une telle projection que nous les voyons.

Déformation. — Elle est nulle au centre et très faible près du

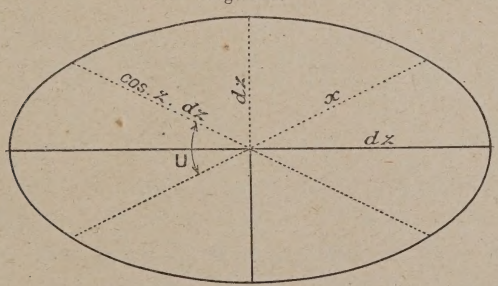
Fig. 161.



centre, mais elle croît rapidement sur les bords. Rapportons les points de la sphère par leurs distances z au point C qui se projette sur le centre c de la Carte.

Un point M, dont la distance sphérique est z, aura sur la Carte,

Fig. 162.



pour distance au centre c, $\sin z$. Si la première augmente de la quantité constante dz, la seconde augmentera de $d \sin z = \cos z\, dz$. Un petit cercle de la sphère, décrit autour de M avec le rayon dz, deviendra sur la Carte une ellipse dont les demi-axes seront dz et $\cos z\, dz$, et, sur les bords, une simple ligne droite égale à $2\, dz$.

L'altération des longueurs autour de M sera donc nulle dans la direction perpendiculaire à cm, et proportionnelle à $\cos z$ dans la direction cm. L'angle de ces deux directions reproduit exactement celui de la sphère ; mais toutes les autres directions autour du point M se trouvent altérées sur la Carte. Le maximum de déformation des angles a lieu pour le système de diamètres rectangulaires du cercle qui se projette sur les diamètres conjugués égaux de l'ellipse m. Soient x leur demi-longueur et U leur angle. On aura, par les théorèmes d'Apollonius,

$$dz \times dz \cos z = x^2 \sin U,$$
$$dz^2 + dz^2 \cos^2 z = 2x^2.$$

En divisant membre à membre, on en tire $\frac{1}{2} \sin U = \frac{\cos z}{1 + \cos^2 z}$. Soit, par exemple, $z = 60^\circ$; alors $\cos z = \frac{1}{2}$. La formule donne $\sin U = \frac{4}{5}$, d'où $U = 53^\circ$. Ainsi, si l'on voulait tracer dans cet endroit de la Carte une rose des vents, des directions telles que NO et NE, comprenant en réalité 90°, n'en comprendraient que 53 sur la Carte. Ces énormes déformations rendent ce système inapplicable à toute autre représentation que celle des astres à diamètre sensible. C'est ainsi que les cirques de la Lune, si parfaitement ronds quand on les voit dans la région centrale, apparaissent de plus en plus elliptiques à mesure qu'ils en sont plus éloignés, et que les taches du Soleil, rondes très souvent vers le centre, s'aplatissent vers les bords et s'y réduisent presque à une simple ligne droite.

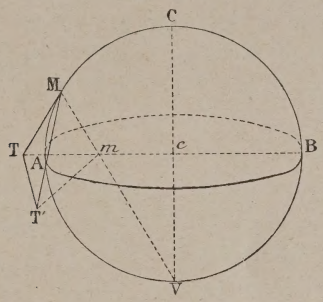
Projection stéréographique.

Au lieu de projeter l'hémisphère sur le plan de sa base, prenons-en la perspective sur ce plan, l'œil étant placé en V à l'extrémité du diamètre perpendiculaire CV (*fig.* 153).

Les propriétés de cette projection tiennent à ce que tout rayon visuel VmM rencontrera la sphère et le plan du tableau sous le même angle. En effet, menons par ce rayon visuel et par le diamètre CV un plan qui coupera la sphère suivant le grand cercle

de la figure. L'angle de la tangente TM avec MV aura pour mesure $\frac{AM}{2} + \frac{90^\circ}{2}$. Il en sera de même de l'angle VmB.

Fig. 163.



D'après cela, si TT′ est l'intersection du plan tangent en M avec le plan du tableau, cette droite sera perpendiculaire au plan du triangle isocèle TMm, et tous ses points seront également éloignés de M et de m. Si donc nous joignons un point quelconque T′ de cette droite aux points M et m, l'égalité des triangles TT′M, TT′m entraînera celle des angles en M et en m.

Or, si deux courbes tracées sur la sphère et se croisant en M ont pour tangentes MT, MT′, leurs projections auront pour tangentes mT, mT′; celles-ci se croisent donc sous l'angle

$$\mathrm{T}m\mathrm{T}' = \mathrm{TMT}'.$$

Ainsi, dans cette projection les angles sont conservés.

Il en résulte qu'un cercle quelconque de la sphère aura pour projection stéréographique un cercle (1). En effet, circonscrivons à la sphère un cône ayant ce cercle pour ligne de contact. Les génératrices seront partout normales à ce cercle. Mettons en perspective le cercle et les génératrices du cône. Puisque les angles sont conservés, les perspectives des génératrices, issues d'un même point, seront normales à la perpective du cercle, ce qui exige que cette perspective soit elle-même un cercle. Il faut remarquer que le centre de cette perspective est la perspective du

(1) A moins que le plan de ce cercle ne passe par le point de vue; alors la projection se réduit à une droite.

sommet du cône circonscrit à la sphère, et non celle du centre ou du pôle de la courbe de contact (Chasles).

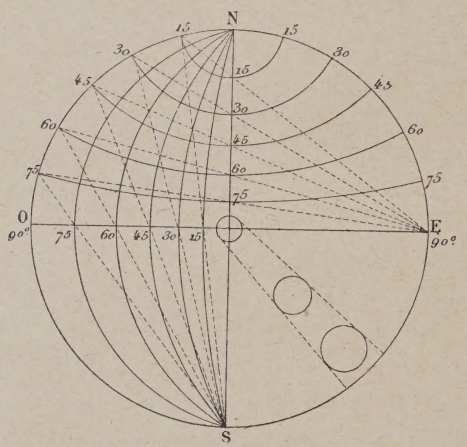
S'il s'agit d'un grand cercle de la sphère, le cône circonscrit dégénère en un cylindre dont les génératrices ont encore pour perspectives des droites qui divergent d'un point de fuite. On détermine ce point en menant par le point de vue V une parallèle à ces génératrices, et en cherchant l'intersection de cette parallèle avec le tableau.

Canevas sur un méridien. — D'après cela, on construira de la manière suivante la projection stéréographique d'un hémisphère sur le plan d'un méridien.

Soient :

NESO le cercle méridien servant de base à l'hémisphère qu'il s'agit de représenter sur le plan dudit cercle ;

Fig. 164.



NS la ligne des pôles, et en même temps la projection du méridien central ;

EO l'équateur.

Le point de vue sera aux antipodes du centre de la Carte, sur l'équateur même. Pour graduer l'équateur, rabattons-le autour de EO, sur le demi-cercle ENO. Le point de vue se rabattra en S.

Divisons de 15° en 15° l'équateur rabattu, et joignons les points

de division au point de vue en S. Les points de rencontre de ces droites avec la ligne OE donneront la perspective des divisions de l'équateur. Les méridiens passeront par ces points de division ainsi projetés, et, comme ils doivent aussi passer par N et S, on aura trois points de chacun d'eux.

On opérera de même pour les parallèles qui coupent le méridien central SN en des points espacés de 15° en 15°. Rabattons à gauche ce méridien central ainsi divisé. Le point de vue se rabattra à droite, en E. On joindra ce point aux divisions de 15°, 30°, 45°, ..., et les points de rencontre de ces droites avec la droite NS donneront les perspectives de la graduation du méridien central. La perspective du parallèle de 15°, par exemple, passera par les trois points marqués 15° sur la figure.

Ces parallèles couperont les méridiens à angle droit. Ceux-ci coupent, en N et S, le méridien central NS, suivant des angles égaux à leurs longitudes comptées à partir du méridien central.

Canevas stéréographique sur un plan diamétral parallèle à l'horizon d'un lieu donné, par exemple, sur celui de Paris, dont la colatitude est 41° 10′. — Soit NS le diamètre du cercle parallèle à l'horizon de Paris. Ce sera aussi le méridien central de la Carte. Paris sera au centre p (*fig.* 165).

Le point de vue doit être pris au point opposé à p sur l'hémisphère inférieur. Rabattons ce méridien central sur la gauche, en Np'S, et le point de vue à droite, en V. Si l'on prend

$$p'\mathrm{P}' = 41^\circ 10',$$

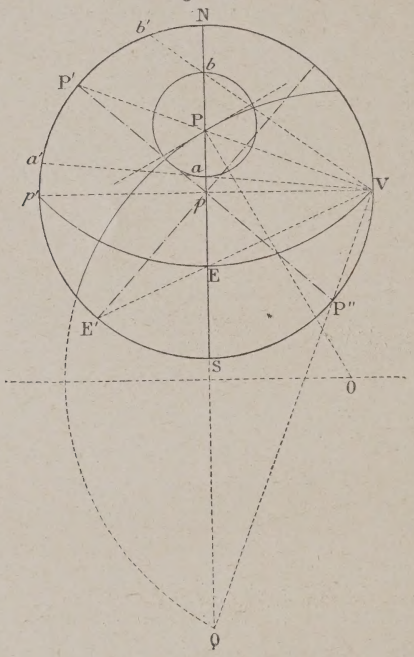
P′ sera le rabattement du pôle nord, et P′P″ la ligne des pôles; nous aurons les perspectives de ces points à l'intersection des droites VP′, VP″ avec NS, l'une en P, l'autre en Q. P et Q seront donc les deux pôles sur la Carte.

Les méridiens sont des cercles qui se croiseront en P et Q sous les angles mêmes qu'ils font entre eux sur la sphère. Leurs centres seront sur une perpendiculaire au milieu de PQ. Pour construire le méridien de 60°, nous tracerons en P une droite faisant 60° avec PS; puis nous lui mènerons en P une perpendiculaire qui déterminera le centre en O, PO sera le rayon de ce méridien.

Les parallèles seront des cercles ou des portions de cercle;

construisons, par exemple, le parallèle sur lequel $\lambda = 30°$. Pour cela, prenons, sur le rabattement NP′S du méridien, deux arcs P′a', P′b' de 30°, et joignons a' et b' à V. Les points de rencontre avec NS détermineront ab, diamètre dudit parallèle.

Fig. 165.



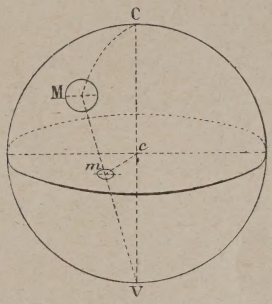
Quant à l'équateur, menez pE′ perpendiculairement à la ligne des pôles P′P″; pE′ sera le rabattement de la trace de l'équateur sur le méridien central. Joignons E′ et V; E sera la perspective d'un point de l'équateur. Sa trace sur le plan du Tableau est d'ailleurs p'V, et sa perspective sera le cercle passant par p', E et V.

Il est intéressant de remarquer que cette mappemonde, sur l'horizon de Paris, renferme presque toutes les terres du globe, sauf l'Australie et la pointe de l'Amérique du Sud. L'autre mappemonde, construite sur l'horizon de nos antipodes, est presque entièrement océanique.

Au lieu de construire géométriquement les centres et les rayons de la projection, il serait facile d'obtenir par le calcul tous les éléments d'un canevas stéréographique.

L'avantage de cette projection, cas particulier de la transformation d'une figure par rayons vecteurs réciproques, est de n'employer que des arcs de cercle pour le canevas et de reproduire

Fig. 166.



fidèlement les angles; aussi s'en sert-on pour de petites mappemondes; mais les déformations linéaires et superficielles sont considérables.

Déformation. — Rapportons les points de la sphère au point C, centre de l'hémisphère supérieur, par leurs distances z à ce point. Soient M un point de cet hémisphère, et m sa perspective. L'angle mVC étant égal à $\frac{1}{2}z$, on aura, si le rayon cV est pris pour unité, $mc = \text{tang}\,\frac{1}{2}z$, $\text{V}m = \text{séc}\,\frac{1}{2}z$, VM projection de CV $= 2\cos\frac{1}{2}z$. Le point m étant déterminé par sa coordonnée $mc = \text{tang}\,\frac{1}{2}z$, si z varie de dz sur la sphère, la projection mc variera de

$$d\,\text{tang}\,\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}dz\,\text{séc}^2\frac{1}{2}z.$$

Imaginons autour de M un cercle de rayon dz sur la sphère. Il aura pour projection stéréographique une section conique dont l'un des axes sera $\frac{1}{2}dz\,\text{séc}^2\frac{1}{2}z$. Pour avoir l'autre axe, menez dans le cercle M le diamètre parallèle au plan du tableau. La projection de ce demi-diamètre dz, réduite dans le rapport de Vm à VM, c'est-à-dire de séc $\frac{1}{2}z$ à $2\cos\frac{1}{2}z$, sera donc $\frac{\frac{1}{2}dz}{\cos^2\frac{1}{2}z}$ comme pour le

premier axe. La section conique est donc un cercle. Dès lors, tout couple de diamètres rectangulaires pris dans le petit cercle de la sphère sera représenté par un couple de diamètres rectangulaires sur la projection. Les angles seront donc conservés, mais les dimensions linéaires sont réduites dans le rapport de 1 à $\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}z}$.

Au centre de la Carte où $z = 0°$, ce rapport est $\frac{1}{2}$; aux bords $z = 90°$, il est égal à 1.

Ainsi la déformation porte sur les dimensions linéaires et superficielles. Bien que les angles soient conservés, les figures de grandeur finie tracées sur la sphère ne sont pas, en général, représentées par des figures semblables sur la projection, parce que, dans l'étendue de ces figures, le coefficient de déformation linéaire varie très sensiblement. Mais, comme on peut le considérer comme constant dans l'étendue des figures infiniment petites, celles-là sont représentées par des figures semblables, deux fois plus petites linéairement et quatre fois plus petites en superficie, au centre de la Carte, tandis qu'elles conservent la même grandeur linéaire et superficielle des bords.

Projection gnomonique.

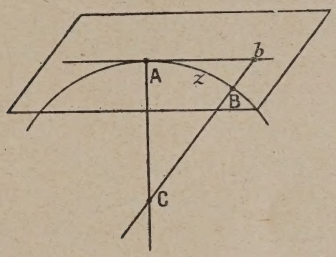
Cette projection est ainsi nommée parce que sa construction ressemble au tracé des gnomons ou cadrans solaires.

Le point de vue est le centre de la sphère, et le tableau est le plan tangent en un point quelconque, c'est-à-dire le véritable horizon de ce point. Tout grand cercle de la sphère se projette suivant une ligne droite, et réciproquement toute ligne droite tracée sur la Carte est la projection d'un grand cercle de la sphère. Tous les méridiens se projettent suivant des lignes décrites passant par le point où l'axe coupe le plan de projection. La projection gnomonique du point B sur le plan tangent en A est b; Ab distance d'un point de la carte au centre de ladite carte est donc tang z, si l'on prend le rayon de la sphère pour unité.

Un petit élément dz de l'arc AB $= z$ devient en projection $d\,\text{tang}\,z = \frac{dz}{\cos^2 z}$.

Un élément de même longueur mais transversalement perpendiculaire au premier devient $\frac{dz \times Cb}{CB} = \frac{dz}{\cos z}$. Un cercle infiniment petit de la sphère devient une ellipse dont nous venons de

Fig. 167.



donner les axes et qui grandit rapidement surtout dans le sens A b, à mesure que z se rapproche de 90°. La déformation est donc énorme si l'on s'écarte beaucoup de A. Mais ce système a la propriété de représenter tous les grands cercles de la sphère par des droites, chose avantageuse pour certaines études d'astronomie et de géologie où l'on a à examiner souvent des alignements.

C'est ainsi que l'on a construit pour les géologues une carte de ce genre, où le globe est représenté par ses projections gnomoniques sur les huit faces d'un octaèdre. On y peut tracer, par de simples lignes droites, les grandes lignes de fracture du globe sur lesquelles se distribuent les chaînes de montagne, les volcans, les filons de mines, les sources thermales, etc. Ce système a été adopté en particulier par M. Élie de Beaumont pour la Carte géologique à petite échelle du pentagone européen; le centre de la carte est situé près de Remsda, en Saxe.

Pour nous rendre compte, dans un cas simple, de l'établissement d'une telle carte, prenons un cube dont deux faces sont tangentes aux pôles, et voyons ce que peut être le canevas sur une des quatre autres faces. Les méridiens sont des droites parallèles, et les parallèles de la sphère seront les traces sur le tableau de cônes dont l'axe est parallèle audit tableau, donc des hyperboles. On n'a plus qu'à rabattre les faces du cube de manière à le développer pour avoir une description complète du globe terrestre.

L'établissement d'une projection gnomonique sur l'horizon d'un

lieu donné donne lieu à un simple problème de géométrie descriptive.

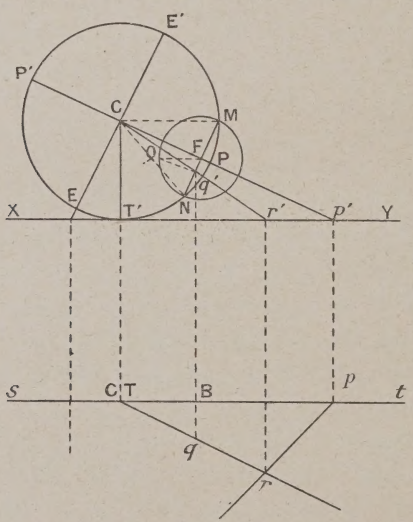
Prenons comme plan horizontal le plan tangent du centre T′ de la Carte et pour plan vertical le méridien origine qui passe par ce centre.

Soient St la trace de ce méridien sur le plan horizontal qui est le plan du tableau ou de la carte, PP′ la ligne des pôles, EE′ la trace de l'équateur sur le méridien origine.

Les projections des méridiens et des parallèles s'obtindront en cherchant l'intersection avec le plan horizontal : 1° des plans méridiens ; 2° des cônes qui ont pour sommet commun le centre de la sphère et pour base les différents parallèles de cette sphère. Cherchons d'abord la trace sur le plan horizontal, d'un méridien quelconque faisant avec le méridien origine un angle X.

Le point où l'axe polaire perce le plan de la carte est en p ; c'est

Fig. 168.



le point où convergent les lignes droites qui représentent les méridiens en projection.

Considérons sur le méridien faisant avec le méridien origine l'angle X un point Q de colatitude λ. Ce point appartient, à la fois, au méridien de longitude X et au parallèle de colatitude λ,

dont la trace sur le méridien origine sera MN, en prenant $PN = \lambda$,

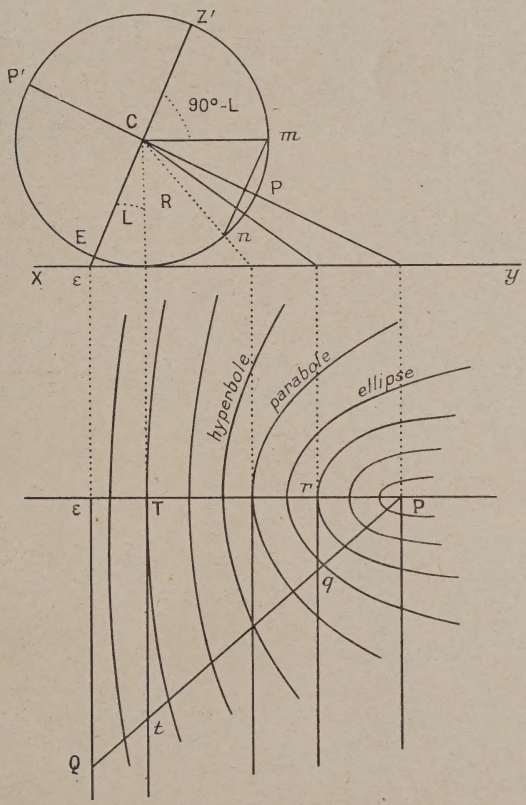
Rabattons ce parallèle sur le méridien origine, autour de la trace MN. Le point Q sera déterminé en rabattement en prenant NQ tel que :

$$NQ = NFXX = \alpha R \sin \lambda.$$

Considérons, dans l'espace, la droite CQ, située dans le méridien de longitude α, et cherchons sa trace sur le plan horizontal.

Pour cela, abaissons la perpendiculaire Qq', joignons Cq' et

Fig. 169.



prolongeons jusqu'en r' ; la trace de CQ se trouvera quelque part sur la perpendiculaire abaissée de r' sur St. D'autre part, la projection de CQ s'obtient immédiatement, en abaissant $q'B$ perpendiculaire sur St, en prenant $Bq = Qq'$ et joignant Tq. La trace

de CQ est donc en r, et pr, trace du plan méridien de longitude α, est sa projection gnomonique sur le plan de la Carte.

Le point q est également la projection d'un point du parallèle NM ; la construction que l'on vient d'indiquer permet donc d'obtenir, points par points, la projection gnomonique des parallèles.

Ici se présente tous les cas d'intersection d'un cône par un plan.

Si le cône est réduit à l'axe polaire, on obtient (*fig.* 169) d'abord le point p ; pour les parallèles voisins du pôle, les intersections ou perspectives sont des ellipses. Pour le parallèle mn de la colatitude telle que Cm soit parallèle à XY, le plan de projection est parallèle à l'une des génératrices du cône et l'arc d'intersection devient une parabole. Pour les paraboles de latitude moindre, c'est un arc d'hyperbole. Enfin, on obtient une ligne droite, lorsque le cône se réduit à un plan ; cette ligne droite est la perspective de l'équateur.

Les constructions graphiques, telles qu'on vient de les indiquer, sont difficiles ou même impossibles dans la pratique. Aussi préfère-t-on recourir au calcul pour obtenir la projection des méridiens et des parallèles, et nous renvoyons pour cela aux traités spéciaux.

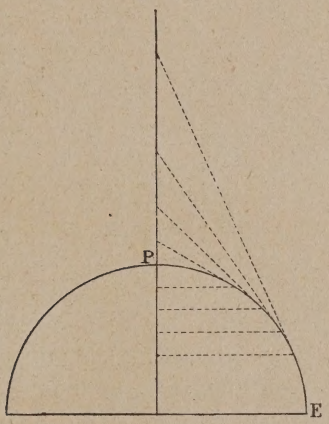
Les géologues emploient de préférence ce mode de projection, parce qu'il permet d'étudier sur la Carte les directions ou alignements des soulèvements de l'écorce terrestre représentés par des lignes droites.

CHAPITRE XXX.

DÉVELOPPEMENTS.

Décomposons la sphère en une série de zones comprises entre des parallèles espacés de $d\lambda$ en $d\lambda$. Ces zones sont assimilables à des troncs de cône séparément développables. Chacun d'eux aura pour apothème la tangente de la colatitude correspondante. Si tous ces troncs de cône sont ouverts suivant un même méridien PE/P′ et développés l'un au-dessus de l'autre de manière à

Fig. 170.

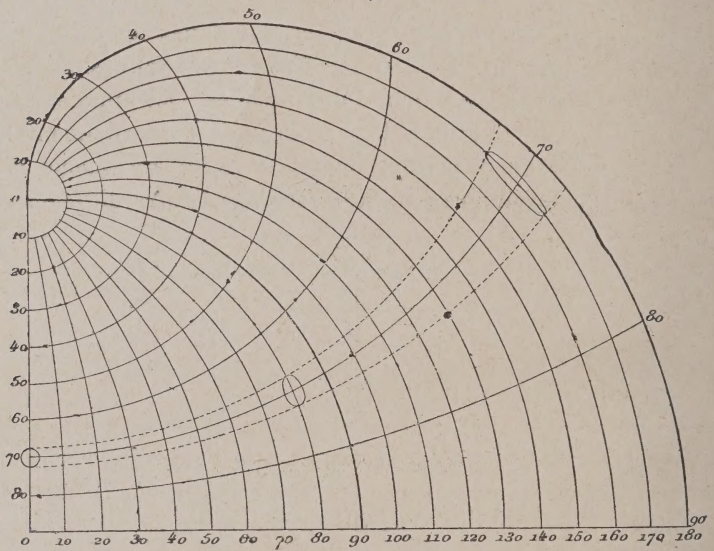


se toucher par le milieu, en sorte que la ligne médiane *pe* soit le développement du méridien PE, la sphère sera représentée par une série de bandes circulaires. Sur chacune d'elles les angles et les dimensions linéaires seront conservés ainsi que les surfaces; mais ces bandes laisseront entre elles de petites solutions de continuité. Sauf le méridien central, tous les autres méridiens seront discontinus. On ne peut faire disparaître ces déchirures sans sacrifier les dimensions linéaires.

Développement polyconique.

Supposons qu'on dilate progressivement chaque bande, de manière qu'elles se rejoignent toutes. Il est évident qu'un cercle infiniment petit, compris dans une zone de la sphère, se trouvera dilaté dans le sens des méridiens et transformé en une ellipse. Les

Fig. 171.



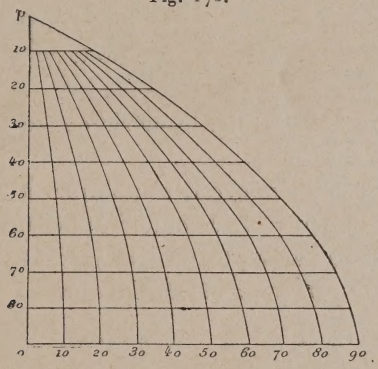
couples de diamètres conjugués de ces ellipses seront des transformées des couples de diamètres rectangulaires du cercle. Les angles sont altérés. Il en sera de même des longueurs, excepté dans le sens des parallèles.

Ce système, usité aux États-Unis et en Angleterre, convient assez bien, par ses parties centrales, à la représentation d'un continent entier. On voit, par la figure ci-dessus, quelle mappemonde singulière il fournirait, si l'on voulait y représenter en une seule Planche, le monde tout entier.

Développement de Flamsteed, ou plutôt de Sanson.

Un autre moyen de faire disparaître les déchirures consiste à rectifier toutes ces bandes en leur conservant même longueur et même largeur. Il est évident que les surfaces seraient conservées; seulement tout rectangle infiniment petit se trouverait transformé,

Fig. 172.



sur les bords de la Carte, en un parallélogramme de même base et de même hauteur, et un cercle inscrit dans ce rectangle se trouverait transformé en une ellipse inscrite dans le parallélogramme. Les diamètres conjugués de l'ellipse répondraient encore ici aux diamètres conjugués du cercle.

Les méridiens ont la forme de sinusoïdes, car, si l'on place l'origine au pôle p, et qu'on porte les colatitudes sur l'axe des x en vraie grandeur, et les arcs de parallèles rectifiés sur des ordonnées, le méridien de 60°, par exemple, s'obtiendra en portant sur chaque ordonnée les $\frac{60}{90}$ du parallèle correspondant, et en joignant tous ces points d'un trait continu. Soit en général L la longitude de ce méridien; l'abscisse d'un de ses points sera $x = \lambda$; le rayon du parallèle sera $\sin\lambda$ (nous prenons le rayon pour unité), et la portion du parallèle qui doit servir d'ordonnée y sera $L\sin\lambda$, L étant exprimé en parties du rayon. On aura donc, pour l'équation de la courbe,

$$y = L\sin x.$$

Soit I l'inclinaison de ce méridien sur l'axe des x, au point où se trouvera représenté, sous forme d'ellipse, un cercle ayant sur la sphère le rayon $d\lambda$. Les diamètres conjugués de cette ellipse seront $d\lambda$ et $\frac{d\lambda}{\cos I}$. Leur angle sera évidemment $90^\circ - I$. La surface de cette ellipse, $\pi\, d\lambda \frac{d\lambda}{\cos I} \sin(90^\circ - I)$, se réduira à $\pi(d\lambda)^2$; elle sera donc égale à celle du cercle correspondant de la sphère. On voit que les surfaces seront conservées.

Quant à l'angle I, altération angulaire, on a

$$\operatorname{tang} I = \frac{dy}{dx} = L \cos\lambda.$$

$90^\circ - I$ est l'angle sous lequel le méridien de la Carte coupe le parallèle au point considéré.

Voyons si ce système pourrait s'appliquer à une Carte comme celle de la France, et pour cela calculons I pour un point extrême du territoire, à Brest, par exemple, où $\lambda = 41^\circ 30'$ et $L = 7^\circ = 0,1222$ en parties du rayon pris pour unité. On aura :

L.....	9,08669
$\cos\lambda$.....	9,8745
tang I.....	8,9614
I.....	$5^\circ 14'$

Alors le canevas de ce développement représenterait, dans cette région, l'angle droit sous lequel le méridien croise le parallèle par $84^\circ 46'$. Cette altération étant intolérable, l'ingénieur géographe Bonne, qui avait à choisir un système de développement pour la Carte de France, dut rejeter celui-là.

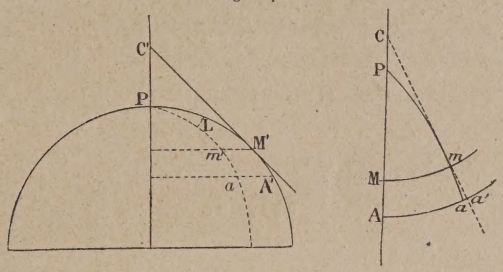
Carte de l'État-Major (développement du colonel Bonne).

Le colonel Bonne imagina de plier toutes les bandes de la figure précédente sur le développement de la bande de 45°. Il parvint ainsi à réduire cette erreur de $5^\circ 14'$ à $18'$, tout en conservant les surfaces et en n'altérant les longueurs que de quantités très faibles.

Soit M' le parallèle moyen qui traverse le pays à représenter, et

dont la colatitude sera désignée par λ_1. Considérons un cône circonscrit à la sphère le long de ce parallèle, cône dont l'apothème $C'M' = \text{tang}\lambda_1$. Nous supposerons ce cône développé, de manière que la génératrice centrale soit CM. L'arc Mm, décrit de C comme centre avec $CM = \text{tang}\lambda_1$ comme rayon, représentera le parallèle

Fig. 173.



moyen et ses divisions que nous porterons sur Mm en vrai grandeur. Pour construire le développement d'un autre parallèle tel que A', portons l'arc M'A', que l'on désignera par α, en MA, en sorte que $CA = \text{tang}\lambda_1 + \alpha$, et avec ce rayon décrivons le cercle Aa, sur lequel nous porterons les divisions en longitude du parallèle A'. En faisant passer un trait continu par les divisions de même longitude des parallèles ainsi tracés sur la Carte, nous aurons un méridien de celle-ci.

Par exemple, soit L la longitude d'un méridien Pm' comptée en parties du rayon. La longueur du parallèle moyen correspondant Mm sera $L\sin\lambda_1$, et celle de l'arc Aa du parallèle de colatitude $\lambda_1 + \alpha$ sera $L\sin(\lambda_1 + \alpha)$. Rapportons cette courbe Pma à des coordonnées polaires ayant C pour pôle et Ca' pour axe. Nous aurons

$$\rho = Ca = Ca' = \text{tang}\lambda_1 + \alpha,$$

$$\omega = \frac{aa'}{Ca'} = \frac{Aa'}{Ca'} - \frac{Aa}{Ca}.$$

Mais

$$\frac{Aa'}{Ca'} = \text{const.} = \frac{Mm}{Cm} = \frac{L\sin\lambda_1}{\text{tang}\lambda_1} = L\cos\lambda_1;$$

c'est l'angle ACa'. On aura donc, pour l'angle aCa',

$$\omega = L\cos\lambda_1 - \frac{L\sin(\lambda_1 + \alpha)}{\text{tang}\lambda_1 + \alpha}.$$

On obtiendrait l'équation du méridien en éliminant α entre ρ et ω. Mais il nous suffit de calculer l'angle I sous lequel cette courbe coupe le rayon vecteur :

$$\operatorname{tang} I = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = -L\,\frac{(\operatorname{tang}\lambda_1+\alpha)\cos(\lambda_1+\alpha) - \sin(\lambda_1+\alpha)}{(\operatorname{tang}\lambda_1+\alpha)^2}\,(\operatorname{tang}\lambda_1+\alpha).$$

Pour appliquer cette formule à la Carte de France, faisons $\lambda_1 = 45^\circ$, remplaçons $\cos\alpha$ par 1 et $\sin\alpha$ par α ; il viendra

$$\operatorname{tang} I = -L\sin 45^\circ\,\frac{(1+\alpha)(1-\alpha)-(1+\alpha)}{1+\alpha} = L\sin 45^\circ\,\alpha.$$

Pour le point le plus défavorablement situé de notre territoire, pour lequel $L = -7^\circ = -0,1222$, $\alpha = -3^\circ 30' = -0,061$, on trouve :

L.....	9,0871
$\sin 45^\circ$.....	9,8495
α.....	8,7860
tang I.....	7,7226
I.....	18′15″

Il s'en faut donc de 18′15″ qu'en ce point extrême le méridien de la Carte soit perpendiculaire au parallèle. Ainsi, les déformations angulaires du canevas sont peu sensibles.

Quant à la déformation linéaire, elle est nulle dans le sens du parallèle. Dans le sens du méridien, l'arc ds de cette courbe a pour expression

$$d\rho\,\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 I} = \left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 I\right)d\alpha.$$

$\log\frac{1}{2}$.....	9,6990	
$\log\operatorname{tang}^2 I$.....	5,4452	
	5,1442	Nombre $= \frac{1}{72000}$

De ces deux directions conjuguées, celle du parallèle ne subit aucune altération linéaire ; celle du méridien en subit une totalement insensible dans la région la plus défavorable de la Carte de France.

Ce n'est pas à dire cependant que les longueurs mesurées sur la Carte dans les directions intermédiaires à celles-là ne soient pas *sensiblement* altérées. Nous aurons les directions où l'altération

linéaire atteint son maximum en cherchant les axes de l'ellipse infiniment petite qui représente sur la Carte autour du point a un cercle de rayon $d\alpha$ sur la sphère, ellipse dont nous connaissons ici deux diamètres conjugués $d\alpha$ et $\frac{d\alpha}{\cos I}$, comprenant l'angle $(90^\circ - I)$. Soient a et b les deux axes; nous aurons, par les théorèmes d'Apollonius,

$$ab = d\alpha \frac{d\alpha}{\cos I} \sin(90^\circ - I) = d\alpha^2,$$

ce qui prouve que l'ellipse a même surface que le cercle, et par suite, que les aires sont conservées; puis

$$a^2 + b^2 = d\alpha^2 + \frac{d\alpha^2}{\cos^2 I} = 2\,d\alpha^2 + d\alpha^2 \operatorname{tang}^2 I.$$

On en tire

$$a - b = d\alpha \operatorname{tang} I,$$

$$a + b = 2\,d\alpha \qquad \text{(en négligeant } \operatorname{tang}^2 I\text{)},$$

et par suite

$$b = \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tang} I\right) d\alpha.$$

Ainsi, dans le sens de ce petit axe, qui est à très peu près une bissectrice de l'angle formé par les diamètres conjugués précédents, c'est-à-dire de l'angle formé sur la Carte par le méridien et le parallèle, l'altération de longueur est de $\frac{1}{2} \operatorname{tang} I = \frac{1}{379}$. Telle est la plus grande déformation de ce genre que présente notre Carte.

M. Tissot, ancien répétiteur du Cours de Géodésie à l'École, remarquant que cette altération est proportionnelle à α, c'est-à-dire à la distance du point considéré au parallèle moyen de la Carte, a conclu qu'on la diminuerait en remplaçant le parallèle adopté de 45° par un parallèle qui partagerait réellement la France en deux parties égales. Les deux colatitudes extrêmes étant 39° et 48°, il faudrait faire $\lambda_1 = 43^\circ 30'$. Alors, en effet, si le cône à développer était tangent à la sphère le long de ce parallèle-là, la plus grande altération de longueur serait de $\frac{1}{650}$, et la plus grande altération angulaire serait de 10′30″ au lieu de 18′15″.

Cette condition que les angles soient très peu altérés sur une Carte comme celle de la France, faite en vue de tous les services publics, est essentielle. Il faut, en effet, que les erreurs propres au canevas de la Carte ne dépassent pas celles des levés topogra-

phiques qui viennent se rattacher à telle ou telle région de cette Carte.

On aurait pu choisir d'autres systèmes parmi l'infinité de ceux qui n'altèrent pas du tout les angles ; mais il y a une seconde condition non moins nécessaire : c'est que les *altérations de longueur* ne varient pas trop d'un bout à l'autre de la Carte, afin que l'échelle de celle-ci puisse être considérée comme constante dans l'étendue de chacune des feuilles dont la réunion forme la Carte d'ensemble.

Le système de projection de Bonne, adopté pour la Carte au $\frac{1}{80000}$ du territoire de la France, dite « Carte de l'État-Major », satisfait bien à ces conditions, et c'est là ce qui a facilité le travail de sa construction, en permettant d'insérer, dans les polygones rigoureusement déterminés par la Géodésie, les levés topographiques de détail, au moyen d'une simple réduction d'échelle, peu différente d'une région à l'autre.

Les arcs de cercle de très grand rayon étant difficiles à tracer, on a calculé les coordonnées rectilignes de leurs points d'intersection avec les méridiens, ce qui montre combien il est peu utile de s'astreindre à représenter sur une grande Carte les cercles de la sphère par des arcs de cercle.

Enfin, ce système se prête très bien aux modifications rendues nécessaires par la figure de la Terre. Il suffit de remplacer dans les formules précédentes $\operatorname{tang}\lambda_1$ par $N\operatorname{tang}\lambda_1$, α par l'arc elliptique s dont nous avons donné le développement en série, et le rayon du parallèle $\lambda_1 + \alpha$ par $N\sin(\lambda_1 + \alpha)$, N étant calculé par la formule

$$\frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cos^2(\lambda_1 + \alpha)}}.$$

C'est effectivement ce qui a été fait.

La Carte de l'État-Major, ordonnée dès 1808 par l'Empereur, fut exécutée à partir de 1818 par le corps des Ingénieurs géographes, qui se fondit en 1831 avec celui des officiers d'État-Major. Le travail a duré 45 ans. Il se compose de 269 Cartes à l'échelle de $\frac{1}{80000}$; les originaux, conservés au Dépôt de la Guerre, sont à une échelle double et à la disposition de tous ceux qui ont intérêt à les consulter.

La Carte de France a été divisée en feuilles de $0^{m},50$ de hauteur sur $0^{m},80$ de largeur, représentant en longueur à l'échelle de $\frac{1}{80000}$, 40 et 64^{km}. Les côtés de ces rectangles sont respectivement parallèles au méridien de Paris et à la tangente au parallèle de 50 grades au point où il coupe ce méridien, mais les distances ne sont pas comptées de ces lignes.

Afin que la ville de Paris fût tout entière contenue dans une même feuille, on a placé au centre d'une feuille (celle d'Aurillac) le point d'intersection des deux axes. C'est donc à partir des lignes correspondant aux bords de cette feuille qu'il faut porter les longueurs de $0^{m},50$ et $0^{m},80$ pour obtenir les rectangles qui indiquent la surface occupée par chaque feuille.

Les deux axes de coordonnées partagent la France en quatre régions : NE, NO, SE, SO.

Pour reconnaître de suite la place que chaque feuille occupe dans sa région, on y remarque deux numéros d'ordre, l'un qui assigne son rang dans le sens du méridien principal, l'autre qui marque son rang dans le sens perpendiculaire, et l'on place ces numéros au milieu des côtés qui forment l'angle dont le sommet est le plus près du centre du développement. Ainsi, par exemple, $^{2}\square_{3}$ désigne la feuille de la région SE qui est la deuxième dans le sens EO, et la troisième dans le sens NS. Il est évident que le chiffre 0 indique une feuille traversée en son milieu par un des axes de coordonnées.

Ces renseignements sont complétés par l'indication des latitudes et longitudes des angles de la feuille dont le calcul est fait exactement et l'on détermine également avec soin les points d'intersection des méridiens et des parallèles avec les lignes formant le cadre de chaque feuille.

Pour les usages courants, on a fait une réduction à l'échelle de $\frac{1}{320000}$, en 32 feuilles, couvrant un espace de $12^{m^{2}},60$, donnant les routes et les cours d'eau, les divisions principales des cultures, le relief du terrain et tous les chefs-lieux de commune au lieu de tous les lieux habités comme le fait la grande Carte.

Cette œuvre immense s'appuie sur un réseau de triangles dont la Carte géodésique de la figure 126 donne une idée fort nette, en ce qui touche la Géodésie du premier ordre.

Le plan premier des travaux géodésiques a été conçu et proposé

par l'ingénieur géographe Bonne ; à l'exécution du travail se rattachent encore les noms du colonel Puissant, de Corabœuf, Henry, Broussaud, Peytier, du chef d'escadron Hossard, depuis professeur d'Astronomie à l'École Polytechnique, et de beaucoup d'autres officiers du corps d'État-Major. Les levés topographiques ont été exécutés par les officiers du Service d'État-Major, et ont été terminés en 1864. La Carte est tenue périodiquement à jour par des travaux de révision sur le terrain qui portent sur toute la planimétrie et sont exécutés par des officiers du Service géographique de l'Armée.

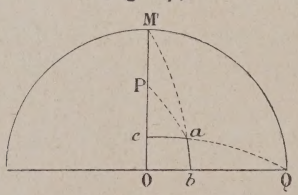
Des travaux analogues ont été entrepris par le Service géographique de l'Armée, et ses filiales, les Services géographiques coloniaux, en Algérie, en Tunisie, au Maroc, en Indo-Chine, en Afrique occidentale, à Madagascar. L'œuvre de nos officiers géographes est considérable et fait le plus grand honneur à la Science française.

Ancienne Carte de France (Carte de Cassini).

Soient O le centre de la contrée qu'il s'agit de représenter, OM le méridien central, OQ un grand cercle perpendiculaire à ce méridien. Un point sera déterminé si l'on mesure en toises, sur la sphère, ses distances à ces deux cercles, c'est-à-dire les arcs ab, ac.

Adoptons pour la Carte un système semblable, en représentant

Fig. 174.



par des droites les deux axes OM et OQ ; le point a y sera porté au moyen des deux coordonnées rectilignes ab, ac, égales en longueur aux arcs de même nom sur la sphère. Le canevas se réduit, comme on le voit, à des droites parallèles à la méridienne OM et à une autre série de droites parallèles à la perpendiculaire OQ. C'est assurément le plus simple et le meilleur de tous les systèmes

pour représenter une contrée de peu d'étendue ; mais il offre déjà quelques inconvénients pour un pays aussi grand que la France.

Les coordonnées géographiques des divers points ne se lisent pas immédiatement sur la Carte de Cassini ; on les déduit facilement, par le calcul, des coordonnées ab et ac. Le triangle rectangle Pac, où P est le pôle, contient ces éléments, car l'angle en $P = L$ et $Pa = \lambda$.

Ce système, abandonné pour la Carte de France, est encore journellement appliqué dans les services publics, pour les Cartes de détail ; l'assemblage de ces Cartes se fait immédiatement et sans difficulté.

Quant au tracé des courbes de niveau et des hachures, nous renvoyons le lecteur aux Ouvrages spéciaux et en particulier à l'Ouvrage du général Berthaut, ancien directeur du Service géographique de l'Armée, *La Carte de France*.

CHAPITRE XXXI.

CARTES DE MERCATOR (POUR LA NAVIGATION).

Ainsi que nous l'avons vu au Chapitre XII, depuis l'introduction de la boussole dans la navigation, au XIII^e^ siècle, on a pris l'habitude de diriger le navire suivant une route, appelée loxodromie, et qui coupe tous les méridiens sous un angle constant. Il suffit alors de déterminer au départ la direction de la route à suivre pour arriver à un point donné; on maintient, à l'aide du gouvernail, l'axe du navire dans cette direction que la boussole permet de retrouver à tout instant et en tout lieu. Mais pour se rendre compte chaque jour de la position du navire, il faut pouvoir tracer sur la Carte la route parcourue.

Le système de projection qui serait le plus utile serait donc un système permettant de dresser des Cartes sur lesquelles la loxodromie serait représentée par une simple droite toujours facile à tracer. Pour cela, il suffit que les méridiens soient transformés en droites parallèles et que les angles soient conservés.

Les angles sont conservés lorsqu'un cercle infiniment petit tracé sur la sphère est représenté, sur la Carte, par un cercle infiniment petit plus ou moins dilaté. Autrement dit, la dilatation qu'un élément infiniment petit doit subir sur la Carte doit être la même dans deux directions perpendiculaires.

Prenons un système analogue à celui de Cassini, mais appliqué à l'équateur et non à un autre grand cercle perpendiculaire à un méridien. Les méridiens seront représentés par des droites espacées de degré en degré perpendiculairement à l'équateur; les parallèles par des droites équidistantes perpendiculaires aux premières. C'est là le système que les navigateurs employaient autrefois sous le nom de *Cartes plates*. Il est facile de voir que, sauf la direction

des parallèles et des méridiens, toutes les autres directions autour d'un point quelconque pris hors de l'équateur sont altérées. En effet, la dilatation est nulle dans le sens des méridiens, puisque ceux-ci sont représentés en vraie grandeur; mais elle est très sensible pour les parallèles, puisque ceux-ci, qui devraient décroître comme sur la sphère proportionnellement à $\sin\lambda$, ont partout même longueur. La dilatation, dans ce sens, est telle qu'un élément $d\lambda$, pris sur le parallèle de colatitude λ, est représenté sur la Carte par $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$. Il faut donc, comme l'a montré Gérard Kaufmann, dit Mercator, au XVI^{e} siècle, dilater pareillement l'élément $d\lambda$ pris au même lieu sur le méridien, c'est-à-dire lui donner sur la Carte la longueur $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$. Cela revient à espacer de plus en plus les parallèles à mesure qu'on s'écarte de l'équateur.

La somme de ces éléments amplifiés d'un même méridien, depuis le parallèle λ jusqu'à l'équateur où $\lambda = 90^{\circ}$, sera

$$\int_{\lambda}^{90^{\circ}} \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

L'intégrale générale s'obtient en remarquant que, $\mathcal{L}$ désignant un logarithme népérien,

$$d\mathcal{L}\operatorname{tang}\lambda = \frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}\,\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{d2\lambda}{\sin 2\lambda};$$

elle est donc $\mathcal{L}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda + \text{const.}$ L'intégrale définie sera

$$\mathcal{L}\,1 - \mathcal{L}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda = \mathcal{L}\cot\frac{1}{2}\lambda.$$

Ayant fait choix d'une longueur m pour les degrés de l'équateur, il faudra, pour tracer les parallèles de 89°, 88°, 87°, ..., les reporter à des distances de l'équateur égales à

$$m\,\mathcal{L}\cot\frac{89^{\circ}}{2},\quad m\,\mathcal{L}\cot\frac{88^{\circ}}{2},\quad m\,\mathcal{L}\cot\frac{87^{\circ}}{2},\quad \ldots$$

Pour tenir compte de la figure elliptique de la Terre, on remplacera $d\lambda$ par l'élément de l'ellipse méridienne

$$ds = \mathrm{R}\,d\lambda = (1-e^2)\frac{\mathrm{N}^3}{a^2}\,d\lambda,$$

et le rayon du parallèle, qui serait $r\sin\lambda$ sur une sphère de rayon r, par $N\sin\lambda$. L'expression précédente devient, en prenant a pour unité,

$$\int_{\lambda}^{90^\circ} \frac{(1-e^2)}{N\sin\lambda}\frac{N^3}{a^2}\,d\lambda = \int_{\lambda}^{90^\circ} \frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\sin\lambda\,(1-e^2\cos^2\lambda)}.$$

On pourrait obtenir l'intégrale complète, mais il suffit de réduire en série, en négligeant $e^4, \ldots$, et d'intégrer. Pour cela, multiplions haut et bas par $1+e^2\cos^2\lambda$ et supprimons les termes en e^4; il viendra

$$\int_{\lambda}^{90^\circ} \frac{1-e^2\sin^2\lambda}{\sin\lambda}\,d\lambda = \mathfrak{L}\cot\frac{\lambda}{2} - e^2\cos\lambda.$$

Si l'on veut remplacer les logarithmes népériens par les logarithmes ordinaires, il faudra diviser ceux-ci par $\log e = 0,4343$, et, pour obtenir le résultat en minutes sexagésimales, on devra multiplier les deux termes par $3437',8$, ce qui donne, avec $e^2 = 0,0068$,

$$7915',705\log\cot\frac{\lambda}{2} - 23',36\cos\lambda.$$

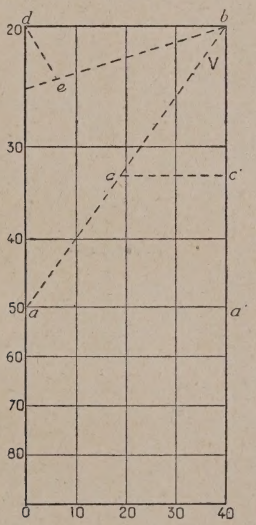
En faisant le calcul pour le parallèle ayant comme colatitude $\lambda = 8^\circ$, on trouve que la distance de ce parallèle à l'équateur au lieu d'être de 82°, est, sur la Carte, de $9122',4 = 152^\circ 2',4$. On devra donc en prenant les degrés sur la division de l'équateur de la Carte, placer le parallèle de 82° de latitude à 152° de l'équateur. La distance est ainsi presque doublée. Mais, dans la région même où $\lambda = 8^\circ$, la dilatation locale est bien plus grande encore, car $\frac{1}{\sin 8^\circ} = 7,2$. Un petit cercle de la sphère y est représenté par un autre cercle de rayon 7, 2 fois plus grand et de surface 52 fois plus grande. Mais ces énormes déformations, qui font même que les régions polaires sont entièrement défigurées, n'empêchent pas la carte de Mercator d'être un instrument indispensable aux marins, comme nous l'avons vu en traitant le problème de la navigation.

Voici les valeurs des distances de divers parallèles à l'équateur :

λ.	Distances.	90° — λ.
		°
0.....	∞	90
20.....	99° 4′,2	70
30.....	75. 7,2	60
40.....	57.36,5	50
50.....	43.27,7	40
60.....	31.16,7	30
70.....	20.17,1	20
80.....	9.59,1	10
90.....	0,0	0

Construisons le canevas de cette Carte. L'équateur y sera représenté par une ligne droite, en vraie grandeur, bien entendu à l'échelle convenue. Divisons-le de 10° en 10°. Les méridiens seront des droites perpendiculaires à la droite équatoriale et passant par les points de division. Les parallèles seront des droites

Fig. 175.



parallèles à l'équateur; leur espacement sera donné par les nombres précédents,

9°,98, 20°,28, 31°,28, 43°,49, 57°,61, 75°,12, 99°,07, ...,

ou par ces mêmes nombres en centimètres si dans la figure

ci-jointe nous prenons $0^m,01$ pour 1°. Le canevas ainsi construit jouit des propriétés suivantes : 1° la dilatation d'un élément linéaire de la sphère autour d'un point de colatitude λ est $\frac{1}{\sin\lambda}$ dans toutes les directions autour de ce point; cette dilatation reste la même tout le long du parallèle de ce point; elle ne varie que d'un parallèle à l'autre; 2° une figure infiniment petite de la sphère tracée autour d'un point de colatitude λ est représentée sur la Carte par une figure semblable; le rapport de similitude est $\frac{1}{\sin\lambda}$; il n'en sera pas de même des figures de dimensions finies; 3° les arcs de loxodromie y seront représentés par des lignes droites, mais leurs éléments linéaires subissent une amplification croissante vers les pôles.

Nous présentons ici une mappemonde construite dans ce système (*voir* pages 216 et 217).

CHAPITRE XXXII.

SYSTÈMES DIVERS. THÉORIE GÉNÉRALE DES CARTES.

Systèmes de Lambert, de Gauss, etc.

On retrouve l'intégrale précédente dans toutes les projections où les angles sont conservés. Si l'on voulait, par exemple, donner au développement de Mercator l'avantage d'avoir un pôle P sans lui ôter la propriété de conserver les angles, on ferait converger vers ce point les méridiens rectilignes sous des angles altérés dans un même rapport en posant $C = mL$, L et C étant les angles compris entre les méridiens sur la sphère et sur la Carte. Ce pôle P serait le seul point de la Carte où les angles ne seraient pas égaux à ceux de la sphère; partout ailleurs il est possible d'établir l'égalité. Il suffit, pour cela, d'espacer convenablement les parallèles circulaires dont le centre commun sera en P, et dont nous allons déterminer le rayon ρ.

Un petit cercle de rayon $d\lambda$ à la colatitude λ sur la sphère devra, pour que les angles soient conservés, être représenté sur la Carte par un petit cercle de rayon $d\rho$ à la distance ρ du point P. Or, l'axe transverse de ce dernier sera

$$\rho\, dC \quad \text{ou} \quad m\rho\, dL = m\rho \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

La condition de la conservation des angles sera donc exprimée par la relation différentielle

$$d\rho = m\rho \frac{d\lambda}{\sin\lambda},$$

dont l'intégrale est

$$\mathcal{L}\rho = \mathcal{L}\tan g^m \frac{1}{2}\lambda + \mathcal{L}K,$$

$\mathfrak{L}$K étant la constante. Cela revient à

$$\rho = \mathrm{K}\,\mathrm{tang}^m \frac{1}{2}\lambda.$$

C'est la projection de Lambert ou de Gauss qui a été employée pour les Cartes de Russie et de Hanovre. On ramènerait à la même condition analytique le canevas plus général de Lagrange. La projection stéréographique polaire en est un cas particulier, et répond à $m = 1$.

La projection Lambert, qui fait partie des systèmes de minimum de déformation de Tissot, dont nous parlerons plus loin, a été adoptée aujourd'hui pour toutes les Cartes de France qu'établit actuellement le Service géographique de l'Armée.

Nous renvoyons le lecteur pour les détails pratiques de calculs de cette projection aux publications spéciales de ce Service.

Si, au lieu de conserver les angles sur cette Carte à méridiens rectilignes convergents et à parallèles circulaires, on voulait conserver les surfaces, le cercle de rayon $d\lambda$ sur la sphère devrait être représenté sur la Carte par une ellipse équivalente. De là la condition

$$d\rho \times m\rho \frac{d\lambda}{\sin\lambda} = r^2\, d\lambda^2,$$

en désignant par r le rayon de la sphère. L'intégrale est

$$\frac{1}{2} m\, \rho^2 = -\, r^2 \cos\lambda + \text{const.}$$

Cette constante est évidemment r^2, d'où il résulte que la Carte sera construite d'après la projection de Lorgna, dont il sera question plus bas.

Projection homolographique de Babinet ou plutôt de Mollweide.

On divise en parties égales le diamètre OE de la Mappemonde; par les points de division on fait passer des ellipses ayant NS pour axe commun. La surface est ainsi divisée en fuseaux équivalents à la moitié des fuseaux sphériques. Soit AB un parallèle qui doit représenter le parallèle de la latitude l, de sorte que OEBA soit la

moitié de la demi-zone sphérique. La surface est

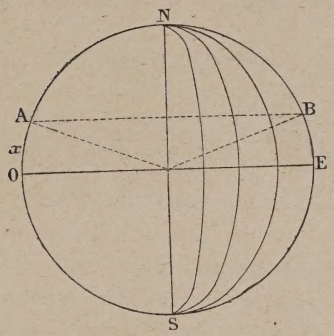
$$r^2 x + r^2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \pi r^2 \sin l$$

ou

$$2x + \sin 2x = \pi \sin l,$$

d'où l'on déduira les valeurs de x qui répondront aux diverses

Fig. 177.

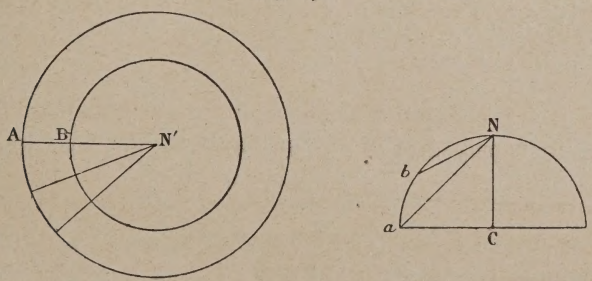


latitudes. De la sorte, les quadrilatères de ce canevas seront égaux en surface à la moitié de ceux de la sphère; mais les angles sont notablement altérés sur les bords.

Projection de Lorgna.

Elle s'applique aux contrées polaires; nous l'avons déjà déduite d'un développement plus général, celui de Lambert.

Fig. 178.



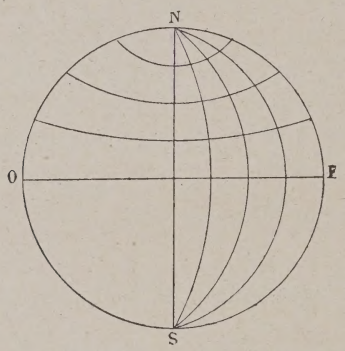
La surface d'une calotte sphérique ayant Nb pour arc est $2\pi r(r - r\cos \mathrm{N}b)$; or la corde N$b$ est moyenne proportionnelle

entre $2r$ et $r - r\cos \mathrm{N}b$; donc $\pi \overline{\mathrm{N}b}^2$ = surface de la calotte sphérique. Si du point N′ comme centre d'une Mappemonde on décrit des cercles avec $\mathrm{N}a$, $\mathrm{N}b$, ... comme rayons, les surfaces comprises entre les parallèles reproduiront exactement celles de la sphère. Il en sera de même des fuseaux correspondant à ceux de la sphère. Les surfaces seront conservées, ainsi que les angles des méridiens et des parallèles, mais non les autres angles ni les distances.

Projection globulaire.

Elle diffère de la projection stéréographique en ce que les cercles méridiens et les cercles parallèles sont également espacés.

Fig. 179.



Le parallèle de 30° passe par les deux divisions de 30° sur le cercle limite et par un point situé au tiers du rayon ON ; ni les angles ni les surfaces ne sont conservés, mais les altérations sont peu notables pour une Mappemonde.

Projection polyédrique ou polycentrique pour les Cartes à grande échelle.

Dans ce système de représentation, on suppose que la surface de la Terre se confond sensiblement avec celle d'un polyèdre à facettes quadrangulaires déterminées chacune par les intersections respectives avec deux plans méridiens et deux plans parallèles au

plan tangent en un point milieu, et comprenant une feuille de la Carte. Cela revient à supposer que la surface de la Terre est plane dans l'étendue de chacun de ces quadrilatères. Parallèles et méridiens sont développés en vraie longueur suivant des lignes droites.

Chaque feuille présente alors l'apparence d'un trapèze dont les deux côtés non parallèles entre eux représentent les méridiens, et dont les côtés parallèles entre eux représentent les arcs de parallèles correspondants sur la sphère, c'est-à-dire de même amplitude géographique.

Ce mode de représentation n'est pas, à proprement parler, un système géométrique de projection; et, il n'est acceptable que lorsque les dimensions de chaque feuille sont peu étendues.

Il peut, à la rigueur, être rattaché à la projection gnomonique en le considérant comme la projection de la surface de la Terre sur le plan tangent au centre de chaque feuille; dans cette hypothèse, les méridiens sont projetés suivant des lignes droites, et les arcs de parallèle suivant des courbes hyperboliques à courbure insensible; les longueurs des projections des arcs de méridien et de parallèle ne diffèrent pas de manière appréciable, sur la Carte, des vraies longueurs sur la sphère.

Ce n'est pas, on le voit, un mode de représentation véritablement scientifique, et les feuilles successives de la Carte ne peuvent être assemblées entre elles sur un plan *sans déchirure*. On obtient toutefois ce résultat d'une manière assez satisfaisante pour 20 ou 30 feuilles, représentant une étendue assez considérable, en profitant de l'élasticité du papier pour combler les vides intercalaires des feuilles.

Résumé.

En résumé, quel que soit le système de projection ou de développement adopté, un cercle infiniment petit de la sphère y sera représenté par une ellipse, et, comme toute ellipse est la projection d'un cercle de rayon convenable placé sous une certaine inclinaison, on peut dire avec Tissot que tout cercle ou toute figure infiniment petite de la sphère se trouve transformé, sur une Carte, en une simple projection orthogonale à une échelle déterminée. On pourrait dire aussi que l'on passe de la courbe sphé-

rique à sa représentation en inclinant, d'un même angle, les ordonnées de la première rapportée à un système d'axes rectangulaires, et amplifiées au besoin dans un rapport donné.

Nous ferons en outre une remarque d'ordre général. Quand on étudie les questions de projections au point de vue pratique, il ne faut pas perdre de vue, qu'en dehors de buts tout spéciaux, un système de projection n'a d'intérêt qu'à la condition de rendre les déformations, dans toute l'étendue utile, non pas rigoureusement nulles sous quelque rapport et très sensibles sous d'autres, mais plus petites, sous tous les rapports à la fois, que certaines limites données.

Théorie générale des Cartes.

Au lieu d'examiner l'un après l'autre les divers systèmes, en nombre illimité, de projections ou de développements, et d'en chercher les propriétés caractéristiques, on peut suivre une marche inverse beaucoup plus générale. Elle consiste à rapporter les points d'une Carte quelconque à un système de coordonnées rectangulaires x et y, fonctions elles-mêmes des coordonnées λ et L sur la sphère, puis à déterminer ces fonctions de manière à donner à la Carte des propriétés particulières.

Soient donc

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(\lambda, \mathrm{L}), \\ y = \mathrm{F}(\lambda, \mathrm{L}) \end{cases}$$

les coordonnées x, y d'un point de la Carte répondant au point (λ, L) de la sphère. Si l'on considère L comme invariable, les équations (1) seront celles du méridien de ce point. En passant du point (λ, L) au point infiniment voisin $(\lambda + d\lambda, \mathrm{L})$, on aura un élément $d\lambda$ de ce méridien; les coordonnées, sur la Carte, de ce second point étant

$$x + \frac{df}{d\lambda} d\lambda, \quad y + \frac{d\mathrm{F}}{d\lambda} d\lambda \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda, \quad y + \frac{dy}{d\lambda} d\lambda,$$

l'élément du méridien, que nous désignerons par a', sera

$$(2) \qquad a' = d\lambda \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}.$$

De même si nous faisons varier L en laissant λ constant, nous

aurons, pour l'élément du parallèle,

$$b' = d\mathrm{L}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\mathrm{L}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathrm{L}}\right)^2},$$

et, si nous voulons que a' et b' représentent les diamètres conjugués de l'ellipse qui répond, sur la Carte, au cercle de rayon $d\lambda$ sur la sphère, il faudra poser

$$d\mathrm{L}\sin\lambda = d\lambda,$$

d'où

$$(3) \qquad b' = \frac{d\lambda}{\sin\lambda}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\mathrm{L}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathrm{L}}\right)^2}.$$

La tangente de l'inclinaison de l'élément a' sur l'axe des x étant $\frac{dy}{d\lambda} : \frac{dx}{d\lambda}$ et celle de l'élément b' étant $\frac{dy}{d\mathrm{L}} : \frac{dx}{d\mathrm{L}}$, on aura, pour l'angle compris que nous avons désigné plus haut par $90^\circ - \mathrm{I}$,

$$(4) \qquad \operatorname{tang}(90^\circ - \mathrm{I}) = \frac{\dfrac{dy}{d\mathrm{L}}\dfrac{dx}{d\lambda} - \dfrac{dy}{d\lambda}\dfrac{dx}{d\mathrm{L}}}{\dfrac{dx}{d\mathrm{L}}\dfrac{dx}{d\lambda} + \dfrac{dy}{d\mathrm{L}}\dfrac{dy}{d\lambda}} \quad (1).$$

Si l'on veut que la Carte jouisse de la propriété de conserver les angles, il faudra exprimer, à l'aide de ces relations, que $a' = b'$ et que $\mathrm{I} = 0^\circ$. On arrive ainsi à une équation aux différences partielles du second ordre, dont l'intégrale donne une indication sur la nature des fonctions $f(\lambda, \mathrm{L})$, $\mathrm{F}(\lambda, \mathrm{L})$. Pour les déterminer entièrement, il suffira d'introduire de nouvelles conditions relatives, par exemple, à l'espèce de lignes qui doivent constituer le canevas : droites, arcs de cercle, courbes du second degré, etc.

Si l'on veut que les surfaces soient conservées, on exprimera que l'aire de l'ellipse dont les diamètres conjugués sont a' et b' est égale à l'aire du cercle de rayon $d\lambda$ sur la sphère. La condition $a'b'\cos\mathrm{I} = d\lambda^2$ conduira à une équation aux différences partielles du premier ordre dont l'intégrale fera connaître la forme de F pour une forme donnée de f.

Contentons-nous de deux exemples des plus simples du premier

(1) On déduira, au besoin, des demi-diamètres conjugués a, b' et de l'angle compris I, les demi-axes a et b de l'ellipse de la Carte, au moyen des théorèmes d'Apollonius.

J. Blanadet, Sc

MERCATOR

150 135 120 105 90 75 60 45 30 15 0 15
75
60
45
30
15
0
15
30
45
60
SPITZBERG
GROENLAND
Islande
Victoria
AMERIQUE
SEPTENTRIONALE
LABRADOR
CANADA
Québec
Terre Neuve
ETATS-UNIS
Washington
New York
Mexique
Golfe du Mexique
Cuba
Haïti
Mexico
EUROPE
BRITANNIQUES
Londres
Madrid
Alger
AFRIQUE
OCÉAN
Bogota
COLOMBIE
GUYANE
Cayenne
AMERIQUE
MERIDIONALE
PEROU
BRESIL
Limat
Rio de Janeiro
LA PLATA
Buenos Ayres
CHILI
PATAGONIE
ATLANTIQUE
Arch. des Ilts Basses
ANTARCTIQUE

cas. Posons $f(\lambda, L) = \frac{\cos L}{\operatorname{tang}\lambda}$, et déterminons $F(\lambda, L)$ de manière à conserver les angles. On aura

$$\frac{dx}{dL} = -\frac{\sin L}{\operatorname{tang}\lambda}, \qquad \frac{dx}{d\lambda} = -\frac{\cos L}{\sin^2\lambda}.$$

En portant ces valeurs dans les équations

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\lambda}\left[\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dL}\right)^2\right],$$
$$\frac{dx}{dL}\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{dy}{dL}\frac{dy}{d\lambda},$$

on trouve, en éliminant une solution parasite,

$$\frac{dy}{dL} = -\frac{\cos L}{\sin\lambda}, \qquad \frac{dy}{d\lambda} = +\frac{\sin L\cos\lambda}{\sin^2\lambda}.$$

Or l'intégrale de

$$dy = -\frac{\cos L}{\sin\lambda}\,dL + \frac{\sin L\cos\lambda}{\sin^2\lambda}\,d\lambda$$

est

$$y \quad \text{ou} \quad F(\lambda, L) = -\frac{\sin L}{\sin\lambda}.$$

Il est facile de voir que le canevas se composera d'une série d'ellipses pour les méridiens et d'une série d'hyperboles pour les parallèles.

Admettons pour second exemple que le canevas doive être formé de droites parallèles équidistantes pour les méridiens. Il faudra poser

$$x = f(\lambda, L),$$
$$y = L.$$

Pour que $90^\circ - I$ soit droit, il faut que

$$\frac{dx}{dL}\frac{dx}{d\lambda} = 0.$$

Par conséquent, $\frac{dx}{dL} = 0$ et $x = f(\lambda)$. Si les angles doivent être conservés, il faut que $a' = b'$ ou que

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{\sin\lambda}\frac{dy}{dL} = \frac{1}{\sin\lambda},$$

relation identique à celle que nous avons eue à intégrer (p. 205) pour les Cartes marines.

Les géomètres, dans leurs recherches à ce sujet, se sont attachés au cas où les lignes du canevas doivent être en totalité ou en partie des arcs de cercles; il suffit pour cela d'exprimer que le rayon de courbure des méridiens ou des parallèles est constant dans toute l'étendue de ces courbes. Mais cette condition manque d'intérêt dans la pratique; nous avons vu en effet, pour la Carte de France, qu'on n'a pu profiter de la figure circulaire des parallèles pour les tracer au compas sur les feuilles; il a fallu les déterminer point par point au moyen de coordonnées rectangulaires, les seules qu'on soit en état de tracer exactement sur ces immenses canevas. Nous laisserons donc de côté ces recherches, intéressantes au seul point de vue de l'analyse, et nous nous bornerons à appliquer les relations précédentes à un sujet plus pratique.

Coordonnées rectilignes de M. Tissot.

Proposons-nous de déterminer les fonctions f et F de manière à réduire au minimum les déformations linéaires et angulaires de la Carte d'un pays limité, tel que la France, l'Espagne, l'Égypte, etc. L'étendue en tous sens étant d'une douzaine de degrés, par exemple, si l'on place l'origine des coordonnées vers le milieu, en désignant par λ_1 la colatitude de ce point, et par $\lambda_1 + \alpha$, L les coordonnées sphériques d'un point quelconque de la contrée, α et L ne dépasseront pas 5° ou 6°, à peu près $\frac{1}{10}$ en parties du rayon. Dès lors, on sera en droit de développer x et y ou $f(\lambda, \mathrm{L})$, $\mathrm{F}(\lambda, \mathrm{L})$ par la formule de Maclaurin, en séries procédant suivant les puissances de α et de L, et de négliger les termes du quatrième ordre, lesquels n'atteindront pas $\frac{1}{10000}$.

Supposons même, pour simplifier encore, que ce pays ait une certaine symétrie par rapport à un méridien, et prenons le méridien central développé sur la Carte pour axe des x, ce qui supprime les termes indépendants de L dans la série de y; on écrira, pour x et y, les expressions

$$(5) \qquad \begin{cases} x = m\alpha + n\,\mathrm{L} + p\alpha^2 + q\,\alpha\mathrm{L} + r\,\mathrm{L}^2 + \dots, \\ y = \qquad n'\mathrm{L} + \qquad q'\alpha\mathrm{L} + r'\mathrm{L}^2 + \dots. \end{cases}$$

et l'on n'aura plus qu'à disposer des indéterminées m, n, p, ... de manière que les rapports d'altération linéaire $\frac{a'}{d\lambda}$, $\frac{b'}{d\lambda}$ ne diffèrent de l'unité que de petits termes en α et L, et de manière que l'altération angulaire I ne contienne dans son expression algébrique que des termes du même ordre.

Après avoir formé les dérivées partielles de x et de y en λ et L ($d\lambda$ ou $d\alpha$ représentant la même chose), on voit immédiatement que $\frac{a'}{d\lambda}$, c'est-à-dire

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2},$$

se réduira à 1 + termes en α et L si l'on fait $m=1$; que

$$\frac{b'}{d\lambda}=\frac{1}{\sin\lambda}\left[(n+q\alpha+\ldots)^2+(n'+q'\alpha+\ldots)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

se réduira pareillement à 1 + termes du premier ordre si l'on fait

$$n=0 \quad \text{et} \quad \frac{n'+q'\alpha}{\sin\lambda}=1, \qquad \text{d'où} \qquad n'+q'\alpha=\sin\lambda;$$

comme on a

$$\sin\lambda=\sin(\lambda_1+\alpha)=\sin\lambda_1+\alpha\cos\lambda_1,$$

à des termes près du second ordre, cela revient à prendre

$$n'=\sin\lambda_1, \qquad q'=\cos\lambda_1,$$

ce qui réduit les équations (5) à

$$\begin{aligned} x&=\alpha+p\alpha^2+q\alpha\,\mathrm{L}+r\,\mathrm{L}^2+\ldots,\\ y&=\qquad\quad \mathrm{S}\sin\lambda+r'\mathrm{L}^2+\ldots. \end{aligned}$$

On s'assure aisément que l'altération angulaire I, dont l'expression est (en remplaçant la tangente par l'arc) :

$$\mathrm{I}=\frac{\dfrac{dx}{d\mathrm{L}}\dfrac{dx}{d\lambda}+\dfrac{dy}{d\mathrm{L}}\dfrac{dy}{d\lambda}}{\dfrac{dy}{d\mathrm{L}}\dfrac{dx}{d\lambda}-\dfrac{dy}{d\mathrm{L}}\dfrac{dx}{d\mathrm{L}}},$$

ne contient que des termes du premier ordre et des ordres suivants.

Faisons maintenant disparaître de ces trois expressions les termes du premier ordre.

Pour que $\frac{a'}{d\lambda}$, c'est-à-dire

$$[(1+2p\alpha+qL+\ldots)^2+(L\cos\lambda+\ldots)^2]^{\frac{1}{2}},$$

ne contienne pas de termes du premier ordre, il faut faire $p=0$, $q=0$. Pour que $\frac{b'}{d\lambda}$ ou

$$\frac{1}{\sin\lambda}[(2rL+\ldots)^2+(\sin\lambda+2r'L+\ldots)^2]^{\frac{1}{2}}$$

n'en contienne pas non plus, il faut que $r'=0$. Nous poserons donc

$$x=\alpha+rL^2+\text{termes du troisième ordre},$$
$$y=L\sin\lambda+\text{termes du troisième ordre}.$$

On aura alors, pour l'altération angulaire,

$$I=\frac{2rL+\sin\lambda_2\cos\lambda_1 L+\ldots}{\sin\lambda_1-2r\cos\lambda_1 L^2+\ldots} \quad (1).$$

Les termes du premier ordre disparaîtront en posant

$$r=\frac{1}{2}\sin\lambda_1\cos\lambda_1=\frac{1}{4}\sin 2\lambda_1.$$

Il ne reste plus qu'à atténuer autant que possible l'influence des termes du troisième ordre. Écrivons

$$x=\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\lambda_1 L^2+\frac{A}{3}\alpha^3-B\alpha^2 L+C\alpha L^2+\frac{D}{3}L^3,$$
$$y=L\sin\lambda+\frac{A'}{3}\alpha^3+B'\alpha^2 L-C'\alpha L^2+\frac{D'}{3}L^3.$$

On en déduira les dérivées partielles de x et de y, et, par suite, on calculera les nouvelles expressions de $\frac{a'}{d\lambda}$, $\frac{b'}{d\gamma}$, I, ne contenant plus que des termes du deuxième ordre. En disposant des nouvelles indéterminées A, B, ..., et en suivant la même marche que précédemment, on fera disparaître les termes du deuxième ordre dans I et dans la différence $\frac{a'}{d\lambda}-\frac{b'}{d\lambda}$, mais non dans ces deux altérations linéaires prises séparément. Tissot parvient ainsi aux expres-

(1) Il est permis de remplacer dans ces petits termes λ par λ_1.

sions finales, en posant, pour abréger,

$$L \sin\lambda_1 = l \qquad \text{et} \qquad k = -\frac{\cos 2\lambda_1}{2\sin^2\lambda_1} - A :$$

$$x = \alpha + \frac{1}{2}\cot\lambda_1 l^2 + \frac{A}{3}\alpha^3 - B\alpha^2 l + k\alpha l^2 + \frac{B}{3}l^3,$$

$$y = \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda_1} l + \frac{B}{3}\alpha^3 + A\alpha^2 l - B\alpha l^2 + \frac{k}{3}l^3 \quad (1).$$

Les constantes indéterminées se trouvent réduites à deux; la déformation linéaire, désormais la même, à très peu près, dans tous les sens, a pour expression

$$A\alpha^2 - 2B\alpha l + \left(\frac{1}{2} + A\right) l^2.$$

Il ne reste plus qu'à profiter, dans chaque cas particulier, de l'indétermination des deux coefficients A et B, et du choix de l'origine (valeur de λ_1 et position du méridien central), pour réduire autant que possible le maximum de déformation linéaire. On y parvient aisément par quelques essais graphiques. Les points d'égale déformation linéaire étant situés sur des ellipses semblables, faciles à tracer sur un transparent, il suffit de faire glisser cette feuille sur une Carte provisoire de manière à comprendre la totalité du territoire dans le périmètre de l'ellipse la plus favorable. Tissot a montré qu'en adoptant ses formules on réduirait les déformations maxima, pour la France, à 25″ en angle et à $\frac{1}{1100}$ en longueur. Nous avons vu (p. 198) qu'elles vont, dans la Carte actuelle, à 18′ et à $\frac{1}{379}$. Quant à l'Espagne, la plus grande altération serait de 4″ pour les angles et de $\frac{1}{840}$ pour les distances. Celle des angles est pratiquement nulle. Pour ce qui est de la déformation linéaire, aucun système ne saurait la produire plus faible, car, par son expression même, où se trouvent les deux constantes A et B, on voit qu'il n'est pas possible de faire disparaître les termes du second ordre.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

(1) Le terme en α^3 revient ici parce que l'auteur ne suppose pas, comme nous l'avons fait, que l'axe des x se confond avec le méridien central, mais qu'il lui est simplement tangent à l'origine.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE (DEUXIÈME FASCICULE).

Pages.

LIVRE CINQUIÈME. — *Géodésie*..... 1

Figure de la Terre..... 3

CHAPITRE XVI. — *Les mesures de la Terre*..... 6

Mesure d'Ératosthène..... 6
Prétendue mesure de Posidonius..... 8
Évaluation de Ptolémée..... 10
Vérification de l'évaluation de Ptolémée par les Arabes..... 10
Mesures modernes..... 11
Fernel, Snellius, Norwood..... 11
Picard et les Cassini..... 12
Expédition en Laponie et au Pérou..... 13
Opérations ultérieures. Méridienne de Delambre..... 14
Les mesures du XIX^e siècle et les travaux actuels..... 15

CHAPITRE XVII. — *Opérations géodésiques pour la mesure d'un arc de méridien*..... 18

Remarques sur les triangles géodésiques..... 19
Choix des stations. Forme des triangles sphériques..... 21
Mesure des angles des triangles..... 23
Signaux et réduction au centre de la station..... 25
Signaux lumineux; phares ou héliotropes..... 27
Méthodes d'observation..... 31
Mesure des bases. Considérations générales..... 33
Opérations de la fin du XVIII^e siècle. Appareil de Borda..... 34
Opérations actuelles. Métal invar. Règles mométalliques. Appareils à fils..... 37
Vitesse de mesure des bases. Fins de journées..... 40
Degré de précision de mesure des bases..... 41
Réduction de la base au niveau de la mer..... 43
Jonction de la base avec le réseau..... 44

Pages.

CHAPITRE XVIII. — *Calcul des triangles géodésiques. Théorème de Legendre. Compensation des erreurs. Calcul de la longueur d'un arc de méridien* 46

Réseau géodésique français 46
Calcul des triangles géodésiques 49
Théorème de Legendre 50
Compensation des réseaux géodésiques 55
Compensation d'un quadrilatère 55
Compensation d'un réseau de triangles 59
Observations astronomiques pour déterminer la direction et l'amplitude de la méridienne 61
Calcul de la longueur de l'arc de méridien 62
Calcul de la méridienne par segments 62
Calcul de la méridienne par projections 64

CHAPITRE XIX. — *Sur la courbure des surfaces convexes* 67

Indicatrice; rayons de courbure principaux 67
Courbure moyenne 69
Lignes de courbure 72
Lignes géodésiques 73
Équations des lignes géodésiques tracées sur une surface de révolution 75

CHAPITRE XX. — *Formules et données numériques applicables à l'ellipsoïde terrestre* 77

Rayons de courbure principaux. Grande normale 77
Rectification d'un arc d'ellipse 80
Éléments de l'ellipsoïde terrestre 82

CHAPITRE XXI. — *Arcs de méridiens mesurés en divers lieux. Détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre* 87

Détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre 88

CHAPITRE XXII. — *Système métrique. Arcs de parallèle* 95

Arcs de parallèle 100

CHAPITRE XXIII. — *Coordonnées géodésiques* 103

Méthode d'Andræ 108
Méthode des Ingénieurs géographes 110
Réduction à l'ellipsoïde 115

Pages.

CHAPITRE XXIV. — *Détermination des altitudes* 118

Nivellement géodésique 119
Remarques au sujet des variations diverses du coefficient *m* 124
Nivellement géométrique 125
Précision du nivellement géodésique comparée à celle du nivellement ordinaire 129
Altitude absolue des stations. Niveau de la mer. Médimarimètre 129
Dépression de l'horizon de la mer 130

CHAPITRE XXV. — *Description astronomique d'un pays en voyage d'exploration. Eléments locaux de l'ellipsoïde terrestre* 134

Calcul des éléments locaux de l'ellipsoïde terrestre : grande normale, distance au centre de la Terre, colatitude géodésique, etc. 135

CHAPITRE XXVI. — *Irrégularités de la surface de niveau. Attractions locales. Déviations de la verticale* 137

Attraction des montagnes 139
Déviations de la verticale 141
Correction des éléments de l'ellipsoïde 143
Corrections à apporter aux angles des triangles géodésiques 149

CHAPITRE XXVII. — *Détermination de l'aplatissement par les mesures de l'intensité de la pesanteur* 152

Historique des observations 153
Détermination de l'intensité de la pesanteur en mer 162
Anomalies de l'intensité de la pesanteur 164

CHAPITRE XXVIII. — *Hypothèses émises sur la constitution intérieure du globe. Isostasie* 167

Isostasie 172
Attraction de la Terre sur un point extérieur 175

LIVRE SIXIÈME. — *Géographie* 179

CHAPITRE XXIX. — *Cartes par projection* 180

Projection orthographique 180
Projection stéréographique 181
Projection gnomonique 188

CHAPITRE XXX. — *Développements* 193

Développement polyconique 194
Développement de Flamsteed ou plutôt de Sanson 195
Carte de l'État-Major. Développement du colonel Bonne 196
Ancienne carte de France (carte de Cassini) 202

Pages.

CHAPITRE XXXI. — Cartes de Mercator (Pour la Navigation)..... 204

CHAPITRE XXXII. — *Systèmes divers. Théorie générale des Cartes*.... 211

Systèmes de Lambert, de Gauss, etc..... 211
Projection homalographique de Babinet ou plutôt de Mollweide.... 212
Projection de Lorgna..... 213
Projection globulaire..... 214
Résumé..... 215
Théorie générale des Cartes..... 216
Coordonnées rectilignes de M. Tissot..... 219

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE.

79210 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. : LITTRÉ 50-14 et 50-15. R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

Traité d'Astronomie stellaire

PAR

Ch. ANDRÉ

Directeur de l'observatoire de Lyon
Professeur d'Astronomie à l'Université de Lyon

DEUX VOLUMES GRAND IN-8 SE VENDANT SÉPARÉMENT

Ire Partie : *Étoiles simples*. Avec 29 figures et 2 planches; 1899 . . . . . 25 fr.

IIe Partie : *Étoiles doubles et multiples. Amas stellaires*. Avec 74 figures et 3 planches; 1900. . . . . 40 fr.

Faye. — *Cours d'Astronomie*. II.

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. : LITTRÉ 50-14 et 50-15. R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

Cours d'Astronomie

A L'USAGE DES ÉTUDIANTS DES FACULTÉS DES SCIENCES

PAR

B. BAILLAUD
Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse
Directeur de l'Observatoire

DEUX VOLUMES GRAND IN-8 SE VENDANT SÉPARÉMENT

Ire Partie : *Quelques théories applicables à l'étude des sciences expérimentales. — Probabilités : erreurs des observations. — Instruments d'Optique. — Instruments d'Astronomie. — Calculs numériques, interpolations*, avec 58 figures; 1893. . . . . 25 fr.

IIe Partie : *Astronomie sphérique. — Mouvements dans le système solaire. — Éléments géographiques. — Éclipses. — Astronomie moderne*, avec 72 figures; 1896. . . . . 40 fr.

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. : LITTRÉ 50-14 et 50-15. R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

Cours d'Astronomie et de Navigation

PAR

P. CONSTAN
Ancien Officier de Vaisseau
Professeur d'Hydrographie de première classe

NOUVELLE ÉDITION

Mise en harmonie avec les derniers programmes d'examens de la Marine marchande, et contenant tous les renseignements théoriques et pratiques qu'un commandant de navire moderne doit posséder

TROIS VOLUMES GRAND IN-8 (25-16) SE VENDANT SÉPARÉMENT
AVEC NOMBREUSES FIGURES DANS LE TEXTE

TOME I : *Astronomie.* Volume de VIII-318 pages, avec 163 fig. et 3 planches; 1924. 40 fr.
TOME II : *Navigation.* Volume de 454 pages, avec 220 fig. et 2 planches; 1924. 60 fr.
TOME III : *Compléments et applications pratiques* . . . . . (*Sous presse*

Tous les Travaux de Typographie

scientifique et commerciale

CATALOGUES INDUSTRIELS

ÉDITIONS D'ART

Gauthier-Villars et Cie

55, Quai des Grands-Augustins — PARIS (6e)

Tél. : Littré 50-14 et 50-15 R. C. Seine 22520

IMPRIMEURS-ÉDITEURS

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DU BUREAU DES LONGITUDES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

Tous les Travaux de Photogravure

trait, simili, couleur

REPRODUCTION D'OUVRAGES ANCIENS

PAR PROCÉDÉ SPÉCIAL

79210. Paris — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, Quai des Grands-Augustins.

223745

Astron.
F

Author Faye, H.

Title Cours d'astronomie et de géodésie. Pt.1, Fasc.2.

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU